Bernard Winkelmann, IDM Bielefeld

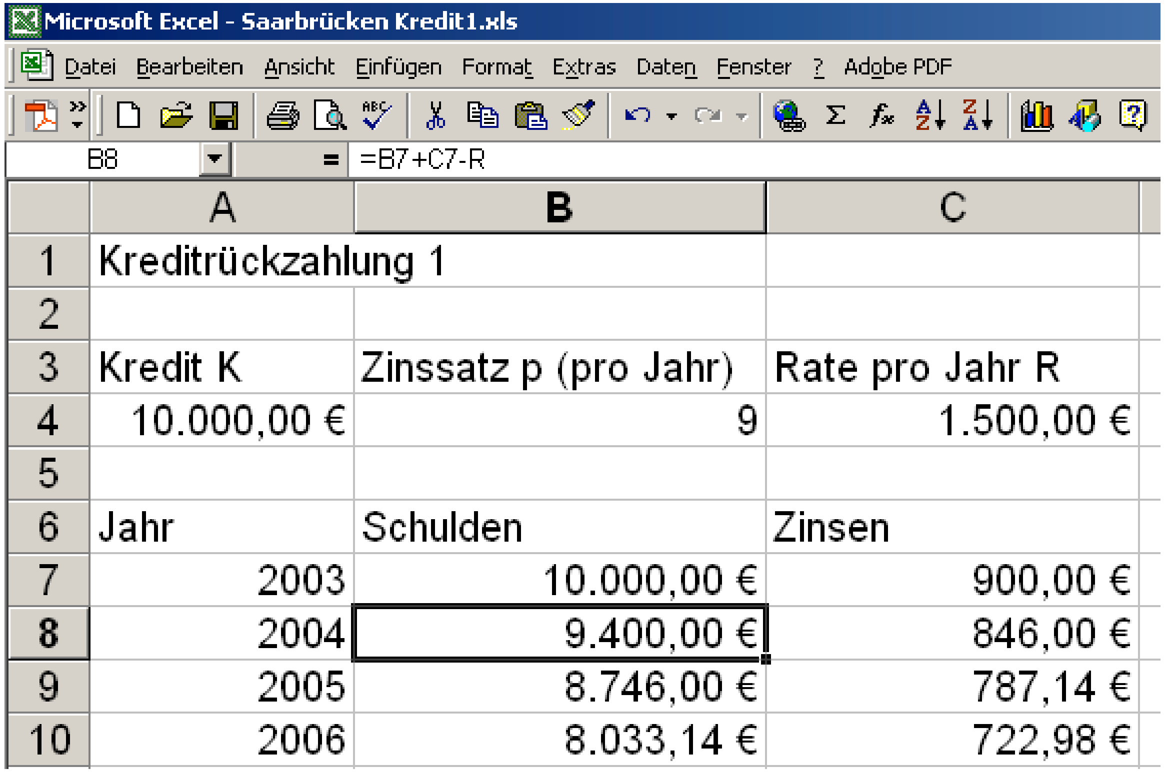
# Mathematische Modellbildung und das Spannungsfeld kontinuierlich - diskret.

Gliederung:

- Einführendes Beispiel: Darlehenstilgung in Excel und Dynasys
- Kontinuierlich vorgestellte deskriptive Modelle: freier Fall und harmonischer Oszillator
- Einfluss der Schrittweite beim negativen exponentiellen Wachstum
- Logistisches Wachstum – kontinuierlich und diskret
- Diskretisierung und Zeitverzögerung
- Annäherungen an das Runge-Kutta-Verfahren
- Die Endlichkeit der Welt und kontinuierliche Vorstellungen bei der Modellbildung

Einführendes Beispiel: Darlehenstilgung in Excel und Dynasys

In Excel öffnen: Saarbrücken Kredit1.xls, Formel für Schulden B8 erläutern.




| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Kreditrückzahlung 1 | | |
| 2 | | | |
| 3 | Kredit K | Zinssatz p (pro Jahr) | Rate pro Jahr R |
| 4 | 10.000,00 € | 9 | 1.500,00 € |
| 5 | | | |
| 6 | Jahr | Schulden | Zinsen |
| 7 | 2003 | 10.000,00 € | 900,00 € |
| 8 | 2004 | 9.400,00 € | 846,00 € |
| 9 | 2005 | 8.746,00 € | 787,14 € |
| 10 | 2006 | 8.033,14 € | 722,98 € |

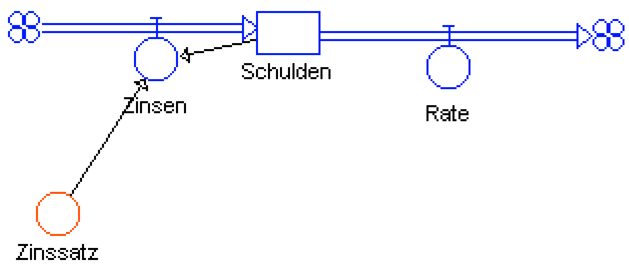
Änderungen der Schrittweite sind möglich, erfordern aber i.a. einen neuen Ansatz:

Saarbrücken Kredit2.xls

C7 = =B7*p/100/n

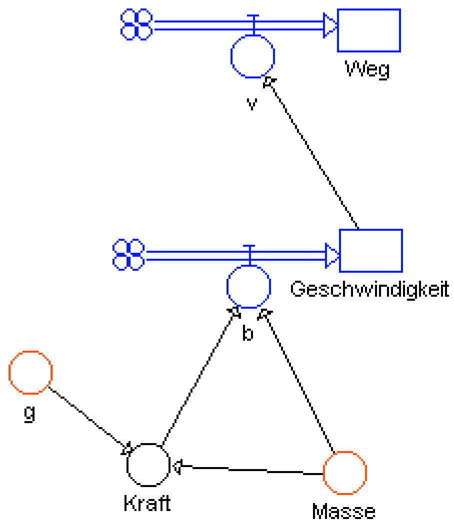
| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Kreditrückzahlung 2 | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | Kredit K | Zinssatz p (pro Jahr) | Rate pro Jahr R | wie oft pro Jahr n |
| 4 | 10.000,00 € | 9 | 1.500,00 € | 2 |
| 5 | | | | |
| 6 | Jahr | Schulden | Zinsen | Rate |
| 7 | 2003 | 10.000,00 € | 450,00 € | 750,00 € |
| 8 | 2003,5 | 9.700,00 € | 436,50 € | 750,00 € |
| 9 | 2004 | 9.386,50 € | 422,39 € | 750,00 € |
| 10 | 2004,5 | 9.058,89 € | 407,65 € | 750,00 € |
| 11 | 2005 | 8.716,54 € | 392,24 € | 750,00 € |

Das im wesentlichen gleiche Modell nun in Dynasys: Kredit2.dyn



## Kontinuierlich vorgestellte deskriptive Modelle: freier Fall und harmonischer Oszillator

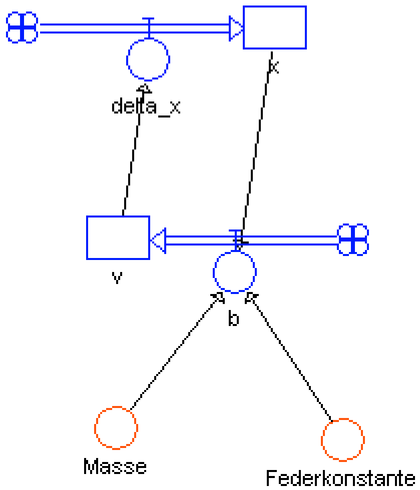
frFall.dyn

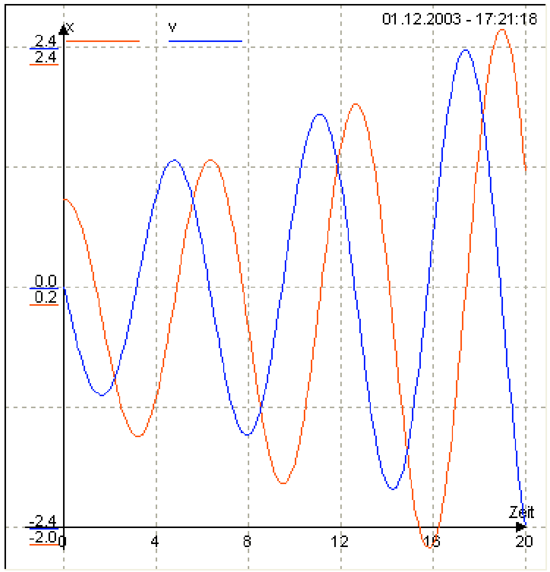


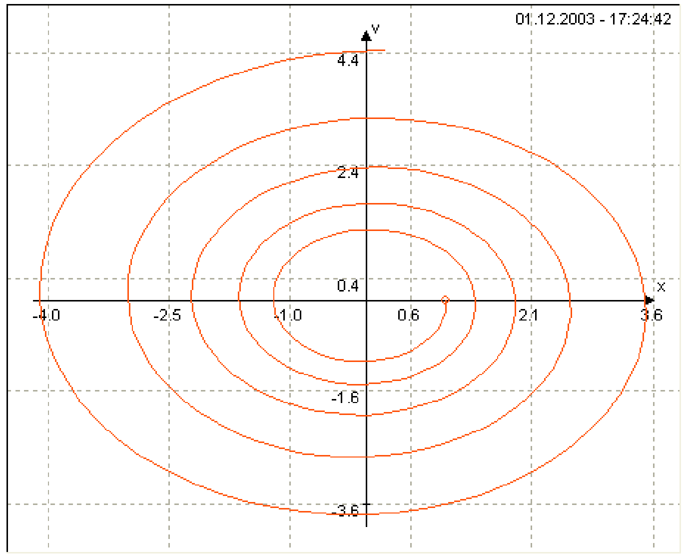

Beim diskreten Rechnen (Euler-Cauchy) ist der berechnete Weg systematisch immer zu klein, der Fehler geht aber gegen Null, wenn die Schrittweite gegen Null geht.

Die analytische kontinuierliche Beschreibung über $x'' = g$ (konst.) ist eleganter, gibt die Vorstellung richtig wieder, setzt aber Analysis voraus.

## harmOsz.dyn



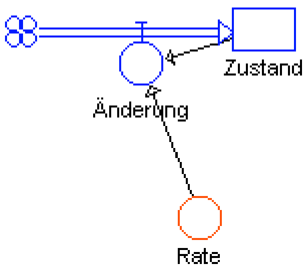



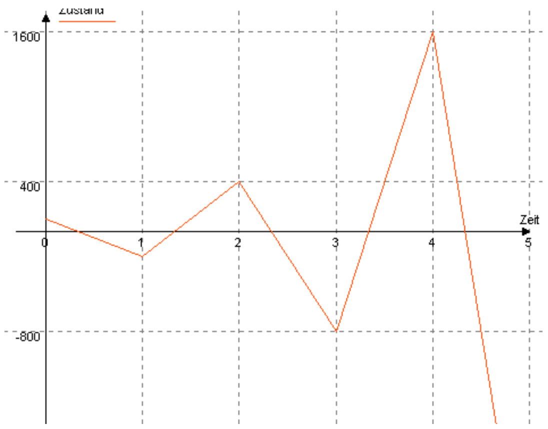




Die Schwingungen werden diskret immer größer, der Energiesatz wird verletzt. Die kontinuierliche Beschreibung über x’’=-a*x mit periodischen Lösungen ist richtiger und eleganter.

## Einfluss der Schrittweite beim negativen exponentiellen Wachstum

expAbn.dyn




Modell erläutern, starten mit Rate = -3, Schrittweite =1, dann kleinere Schrittweiten.

Das Modell entspricht der DGL $x' = - a x$ mit der Lösung $x = x_0 \exp(-a t)$.

Inhaltliche koninuierliche bzw. diskrete Deutungen für radioaktiven Zerfall, Populationsdynamik, Abkühlungsprozesse.

Die Diskretisierung führt bei Schrittweite s auf das Modell $x_{n+1} = x_n + s\,(-a\,x_n) = x_n\,(1 - s\,a)$, also eine geometrische Folge mit der Lösung $x_n = x_0\,(1 - s\,a)^n$.

Damit ergibt sich folgendes Verhalten, das in der Simulation auch beobachtet wird:

monoton abnehmend für $0 < 1 - s\,a < 1$, d.h. $s < 1/a$ (das erwartete Verhalten)

identisch 0 ab $n=1$ für $s = 1/a$

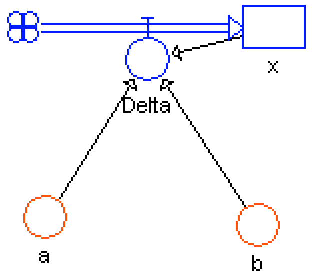
konvergent oszillierend für $1/a < s < 2/a$

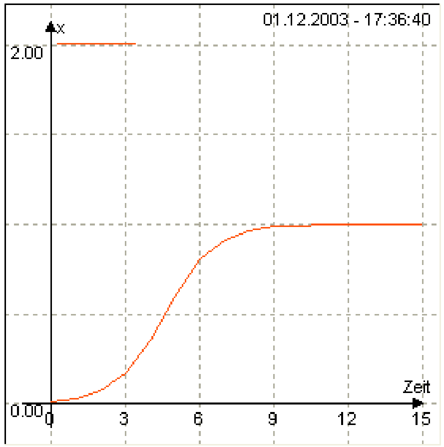
periodisch mit Periode 2 für $s = 2/a$

zunehmend oszillierend für $s > 2/a$

## Logistisches Wachstum – kontinuierlich und diskret

logW.dyn




kontinuierliche Beschreibung durch die DGL $x' = a\,x - b\,x^2$, deren Lösungen qualitativ leicht erklärt werden können: stationäre Punkte für $x = 0$ und $x = a/b$, monoton steigend für $0 < x < a/b$, monoton fallend für $x > a/b$; also ist 0 abstoßend und a/b anziehend (Punkt-Attraktor).

Diskretisierung mit Schrittweite s: $x_{neu} = x + s\,(a\,x - b\,x^2) = x\,(1 + s\,a) - b\,x^2$ .

Inhaltliche Deutungen.

Üblicherweise skaliert man im diskreten Fall um und betrachtet die Iteration $x \to a\, x\, (1 - x)$ auf dem Intervall $0 \leq x \leq 1$. Ein Fixpunkt ergibt sich (außer bei $x = 0$) bei $x = 1 - 1/a$, falls $a > 1$. Zur Untersuchung der Stabilität betrachtet man $f'(1 - 1/a)$ mit $f(x) = a\, x\, (1-x)$: $f'(1 - 1/a) = 2 - a$.

Das heißt: für $1 < a < 2$ erhalte ich monotone Konvergenz, für $2 \leq a < 3$ oszillierende Konvergenz. Für $a > 3$ wird der Fixpunkt abstoßend, aber die Nicht-Linearität verhindert ein ständiges Anwachsen der Oszillationen. Stattdessen beobachtet man Periodenverdopplungen und Chaos.

(Bild des Feigenbaum-Diagramms, siehe z.B. Peitgen, Chaos, S. 207).

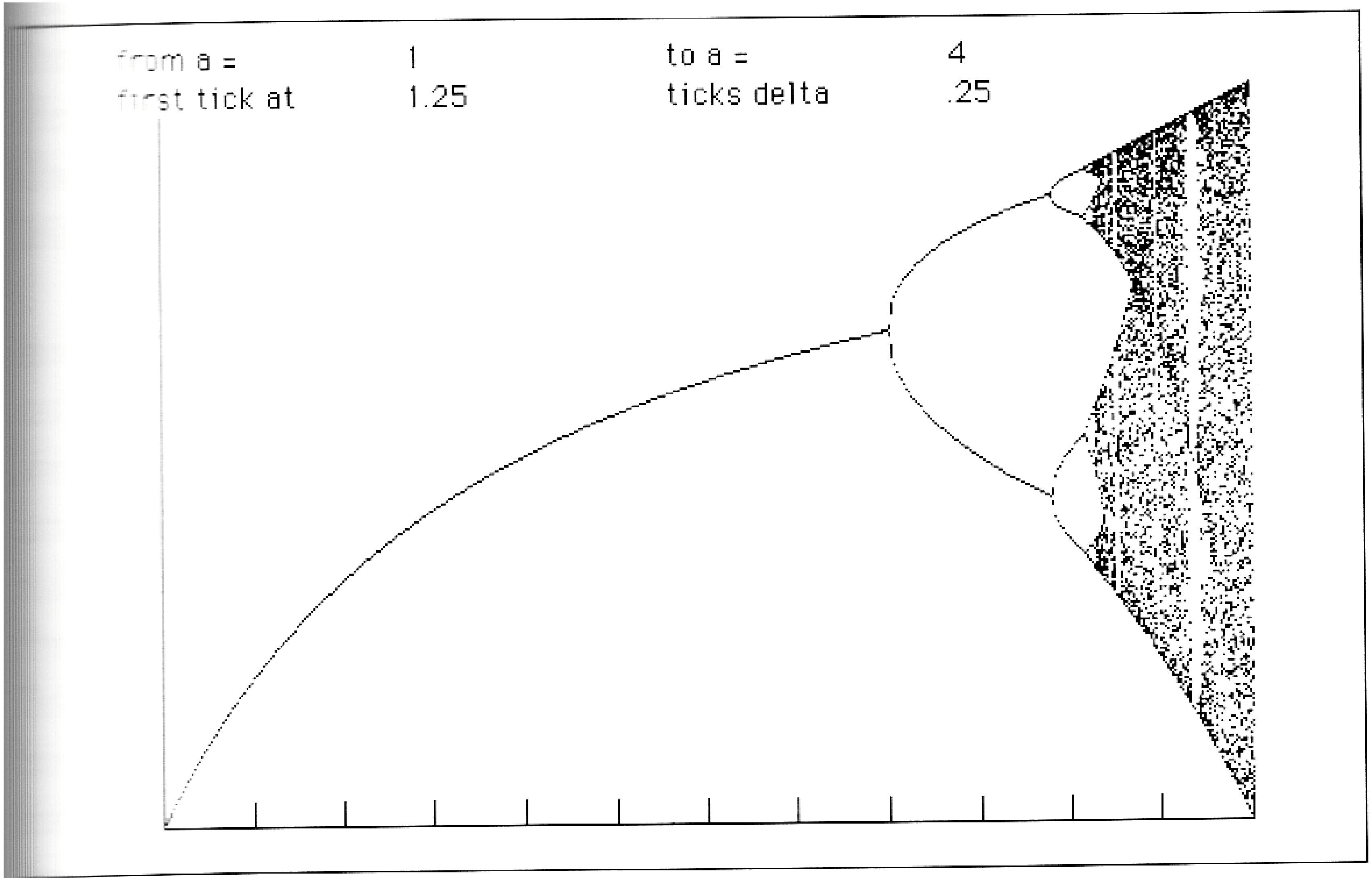
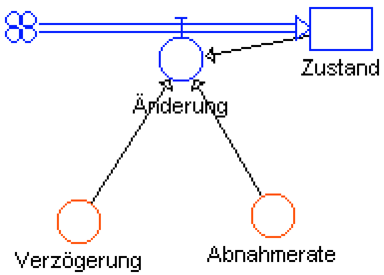


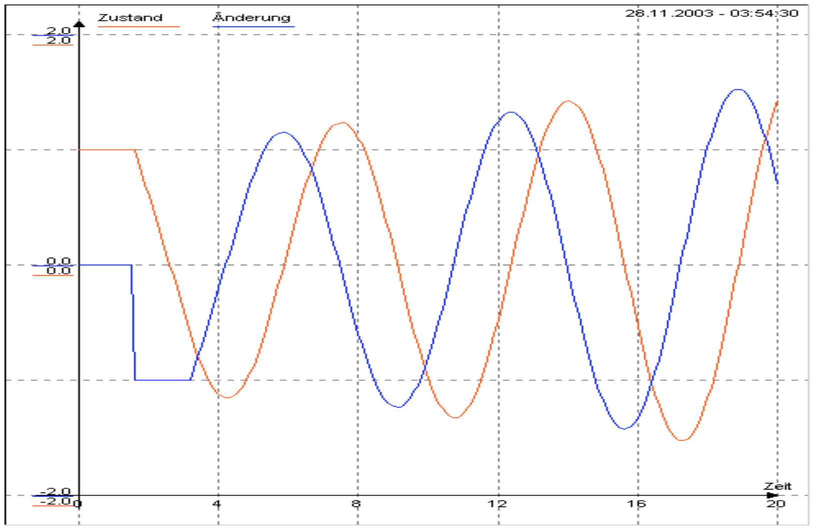

**Abb. 2.54** : Ausgabe des Programms „Feigenbaum“.

## Diskretisierung und Zeitverzögerung

Die Diskretisierung entspricht inhaltlich (u.a.) einer Zeitverzögerung:

expAbnVz.dyn



**Annäherungen an das Runge-Kutta-Verfahren**

Halbschrittverfahren

Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Vergleich mit numerischen Integrationsverfahren: Sehnen-, Sekanten-, Simpsonverfahren

Begriff der Ordnung eines Verfahrens ist wichtiger als die Kenntnis spezifischer Einzelheiten.

**Die Endlichkeit der Welt und kontinuierliche Vorstellungen bei der Modellbildung**

Kontinuität ist eine Illusion (Zeno, Heisenberg'sche Unschärferelation)

Dimensionen eines Wollknäuels

Nicht-Linearität und Skalenbeschränkungen

Grenzwerte als Ausdruck von Invarianten bei endlichen Schrittweiten

Mandelbrots „Küstenlänge von England“

Was sind reelle Zahlen wirklich?