

Universität des Saarlandes



Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint

**Mathematikunterricht
und Integrative Medienpädagogik —
zum Beispiel: Funktionen und Aliasing**

Horst Hischer

Preprint No. 79
Saarbrücken 2003

Universität des Saarlandes



Fachrichtung 6.1 – Mathematik

**Mathematikunterricht
und Integrative Medienpädagogik —
zum Beispiel: Funktionen und Aliasing**

Horst Hischer

Saarland University
Department of Mathematics
Postfach 15 11 50
D-66041 Saarbrücken
Germany
E-Mail: hischer@math.uni-sb.de

submitted: April 09, 2003

Preprint No. 79
Saarbrücken 2003

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Im Stadtwald
D-66041 Saarbrücken
Germany

Fax: + 49 (0) 681 302 4443
E-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW : <http://www.math.uni-sb.de/>

Horst Hischer, Saarbrücken

Mathematikunterricht und Integrative Medienpädagogik — zum Beispiel: Funktionen und Aliasing *

1 Neue Medien als Unterrichtsinhalt

Die Neuen Medien sind nicht nur bezüglich des Einsatzes im Unterricht, also als nützliches Werkzeug und Hilfsmittel, zu diskutieren, sondern auch und gerade als *Gegenstand* des Unterrichts, d. h., als *Unterrichtsinhalt*. Dies ist eine Bildungsaufgabe für die *Schule insgesamt*, und zwar im Sinne des Konzepts einer *Integrativen Medienpädagogik*, bei der im Prinzip alle Unterrichtsfächer (fach-)spezifische Beiträge zum Verständnis der für die Gesellschaft faktisch wichtigen Neuen Medien leisten können – *spezifisch* sowohl bezüglich der Verwendung als Unterrichtsmittel (sofern dies fachdidaktisch angemessen ist) als auch bezüglich der analysierenden und reflektierenden Betrachtung im jeweiligen Fachunterricht. Dabei kommt es vor allem darauf an, dass Lehrkräfte und mit Bildungsplanung Beschäftigte für das Anliegen einer Integrativen Medienpädagogik *sensibilisiert* werden, indem sie Neue Medien nicht entweder nur *technikeuphorisch einsetzen* oder sie *technikfeindlich ablehnen* bzw. einfach erst gar nicht zur Kenntnis nehmen, sondern diese auch als *Bildungsinhalt* begreifen!

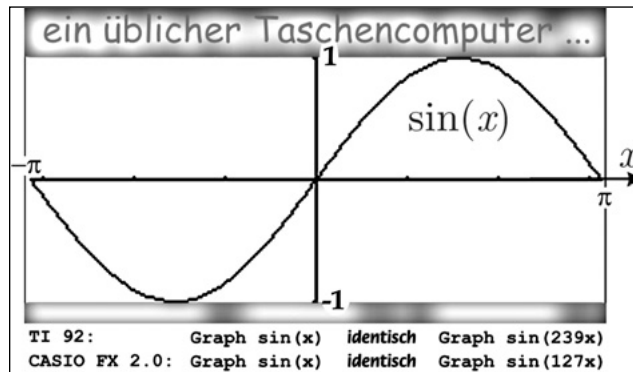
Für den Mathematikunterricht wäre *ein bescheidener erster Schritt* schon damit getan, wenn wichtige mathematiktypische Werkzeuge und Hilfsmittel wie etwa Funktionenplotter, Computeralgebrasysteme, Dynamische Geometriesysteme, Tabellenkalkulation und das Internet im Unterricht nicht nur im Sinne der *Mediendidaktik* eingesetzt, sondern auch im Sinne der *Medienkunde* und der *Medienerziehung* zum Unterrichtsinhalt würden, indem sie bezüglich ihrer Möglichkeiten kritisch begleitet, reflektiert und – wenn möglich – auch untersucht werden. Dieses wird im vorliegenden Beitrag exemplarisch für Funktionenplotter skizziert.

2 Stroboskopeffekt als „Aliasing“

Funktionenplotter sind ein nützliches Werkzeug, sie liefern von termdefinierten Funktionen schnell einen mehr oder weniger „schönen“ (auch „richtigen“?) Funktionsgraphen, **Funktionsplot** genannt. Und ein Funktionsplot ist nach Winkelmann (1991) die *Simulation* eines Funktionsgraphen. Doch ergeben solche Simulationen auch immer einen *gültigen Eindruck des Graphen*? So tritt das lateinische *simulo* (*abbilden, darstellen*; auch: *vorgeben, erheucheln*) sowohl in *simulacrum* (*Abbild, Nachbildung*; auch: *Trugbild*) als auch in *simulatio* (*Verstellung, Heuchelei, Täuschung*) wieder auf!

* Ausführliche Betrachtungen und weitere Literaturangaben zu diesem Thema und zu allen hier genannten Quellen finden sich in [Hischer 2002].

Nebenstehende Abbildung zeigt verheerende „Simulationen“ der Sinusfunktion, die ähnlich mit **jedem** Funktionsplotter erzeugbar sind: So sind hier die Funktionsplots von $\sin(127x)$ (beim CASIO FX 2.0) bzw. von $\sin(239x)$ (beim TI 92) – jeweils identisch mit dem Funk-



tionsplot von $\sin(x)$. Neue Medien begegnen uns hier als *Täuscher* (L. Fraunholz, 1991) – passend zur ursprünglichen Bedeutung von „simulatio“!

Winkelmann verwendete 1991 für dieses Phänomen die Bezeichnung „*Stroboskopeffekt*“, und ganz im Sinne der in diesem Beitrag propagierten medienkundlichen und medienerzieherischen Aspekte plädierte er dafür, solche Probleme zum *Unterrichtsinhalt* zu machen. Doch können wir das im Mathematikunterricht leisten? Können wir mehr leisten, als diesen Stroboskopeffekt nur zu demonstrieren bzw. ihn erleben zu lassen und dann *medienerzieherisch* ein kritisches Bewusstsein zu wecken, oder können wir bei den Schülerinnen und Schülern (und den Lehrkräften!) darüber hinaus auch *medienkundlich* ein Verständnis für die Ursache(n) des Stroboskopeffekts entwickeln? Können wir ihn vielleicht sogar gezielt *erzeugen*?

In der Numerik zählt dieses Phänomen zum sog. „Aliasing“ – das sind also „andere“ (d. h.: falsche) Darstellungen (nunmehr pleonastisch: *Fehlsimulationen*). Das Aliasing wird in der Numerik unter der „Theorie der Moiré-Phänomene“ behandelt. (Und bei Graphikprogrammen haben wir uns vielleicht schon oft gefragt, was denn wohl „Anti-Aliasing“ ist!)

3 „Idee“ vs. „Simulation“ mathematischer Objekte

Mit der *Interpretation des Funktionsplottens als Simulation* zeigt sich im Nachhinein, dass auch die vertraute *händische* Darstellung von Funktionen im Rahmen klassischer Kurvendiskussionen eigentlich nur eine *Simulation* (von Funktionsgraphen) ist – mit welcher Güte? Doch was **ist** dann eigentlich ein Funktionsgraph oder gar eine Funktion? Und wir können solche Betrachtungen fortsetzen, etwa bei der Zeichnung eines Kreises. Was **ist** eigentlich eine Gerade, ein Kreis, ...? Wenn wir also Neue Medien zum *Unterrichtsinhalt* werden lassen, werden damit zugleich klassische philosophisch-mathematische Fragen bedeutsam, so etwa die Unterscheidung zwischen der *Idee* eines Objekts und dessen *Darstellung* – hier wirken Neue Medien auf alte Medien zurück: *Wir können neue Inhalte in alten sehen!*

4 Eine erste Analyse des Aliasing

Aliasing ist *keine optische Täuschung!* Aber dennoch ist Aliasing eine *Täuschung*, nämlich (nochmals pleonastisch:) eine *Fehlsimulation* (s. o.). Wie können wir im Unterricht vorgehen, um dieses Phänomen aufzuklären?

Durch Erzeugung des Aliasing mit unterschiedlichen Funktionenplottern nähern wir uns der Ursache des Phänomens: Nachdem wir den Effekt bei *einem* Funktionenplotter (etwa einem Taschencomputer) an dem Term $\sin(ax)$ für einen konkreten Frequenzfaktor a entdeckt haben (etwa vorseitige Abbildung), erforschen wir ihn experimentell für andere Werte und Plotter. (Es ist dabei vorteilhaft, $\sin(a\pi x)$ anstelle von $\sin(ax)$ zu untersuchen und dabei im Graphikfenster die x -Achse von -1 bis $+1$ oder von 0 bis 2 zu skalieren.) Experimentieren wir in diesem Sinne etwa mit Derive™ bei einer Bildschirmauflösung von 1024×768 Pixeln und *nebeneinander* angeordnetem Algebra- und Graphikfenster, so ergeben sich identische Plots für $\sin(\pi x)$ und $\sin(1393\pi x)$! Ändern wir nun interaktiv die Breite des Graphikfensters, so erhalten wir eine *Fülle verheerender Simulationen!* Für die Veränderung neigen wir spontan zu einer naiven Erklärung, etwa: das Aliasing „irgendwie“ der diskreten Pixeldarstellung auf dem Bildschirm zuzuschreiben. Wir können jedoch mit anderen Funktionenplottern auch zu ganz anderen Ergebnissen gelangen, etwa mit dem Programm ParaPlot von Robert Triftshäuser (vgl. <http://hischer.de/mathematik/didaktik/neuemedien/>):

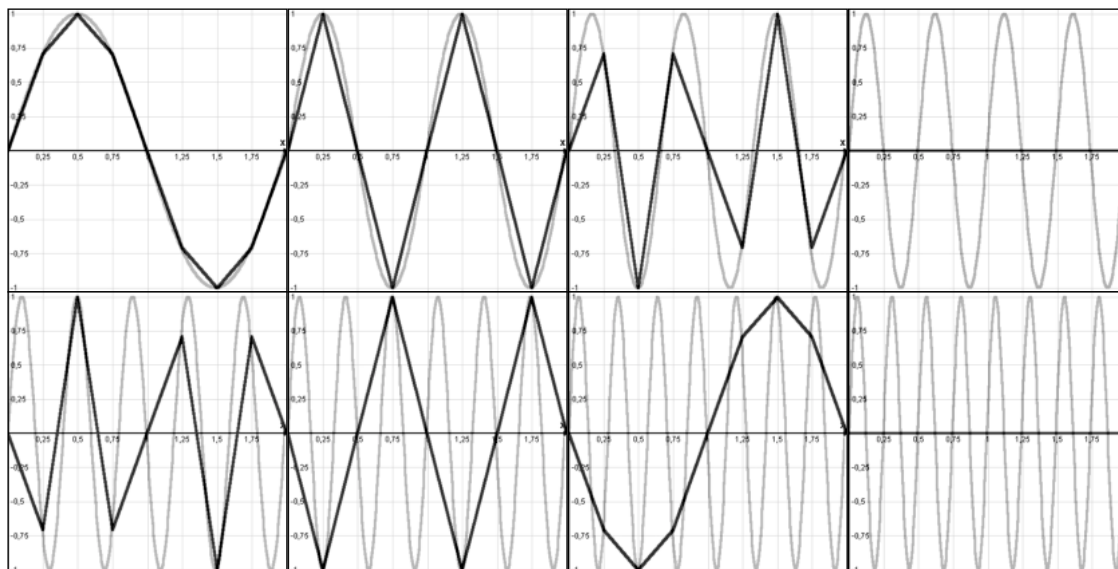
Wenn wir hier in Analogie zu Derive einen „richtigen“ Wert für a gefunden haben, der zu einer „Fehlsimulation“ wie in obiger Abbildung führt, so ist diese Simulation überraschenderweise unabhängig von der Fensterbreite – ganz im Gegensatz zu Derive! Das Durchforsten der Einstellungsmöglichkeiten von ParaPlot führt dann zu der Entdeckung, dass man hier die Anzahl der (äquidistanten) Stützstellen frei wählen kann – bei Derive hingegen sucht man eine solche Option vergeblich: Derive hat also eine eingebaute *Stützstellenautomatik!* Dieses unterschiedliche Verhalten der Funktionenplotter kommt uns sehr gelegen: Es führt uns zur Problemlösung!

5 Aliasing als Abtastphänomen

Der Stroboskopeffekt wird somit (primär) *nicht* durch die diskrete Bildschirmauflösung verursacht, sondern seine Ursache ist bereits *rechnerintern* zu sehen: Der Funktionsterm wird durch die vorgegebenen bzw. gewählten Stützstellen *abgetastet*, und die damit erhaltenen Koordinatenpaare (Wertetabelle!) werden als Pixel auf dem Bildschirm dargestellt (wobei ein sekundärer Aliasing-Effekt möglich ist, dem wir hier nicht nachgehen).

Das Programm ParaPlot macht dieses Phänomen nun auch für Schülerinnen und Schüler erfahrbar und „begreifbar“, weil die *Stützstellenanzahl einzeln für jeden Funktionsterm (!)* mittels Schieberegler *wählbar* ist. Das folgende Beispiel zeigt das Wesentliche des Aliasing: Sukzessive werden die Graphen von $\sin(\pi x)$, $\sin(2\pi x)$, ... , $\sin(9\pi x)$ jeweils über dem Intervall $[0; 2]$ „abgetastet“ (also: rechnerintern wird eine äquidistante Wertetabelle erstellt), und die so gefundenen Wertepaare $(x; f(x))$ werden vom Funktionenplotter durch Pixel auf dem Bildschirm *linear interpoliert* dargestellt (schwarz). Als Schrittweite wurde hier $\frac{1}{4}$ gewählt, d. h., es gibt 8 Abtastintervalle (Abtastrate = 8, sog. „Sampling-Frequenz“). Jedes Einzelbild ent-

hält zugleich einen „richtigen“ Funktionsplot (hellgrau) mit hoher Abtastrate (hier: 500). Es wird dann einsichtig, weshalb sich bei der Abtastung von $\sin(4x)$ (Frequenz = 4 = halbe Abtastrate) und $\sin(8x)$ (Frequenz = 8 = Abtastrate) als „Aliasing-Graph“ jeweils die x -Achse ergibt! Die Abtastung von $\sin(9x)$ mit der Abtastrate 8 fehlt hier – sie ist identisch mit der Abtastung von $\sin(x)$! Zugleich entdecken wir: Die „Fehlsimulationen“ von $\sin(nx)$ wiederholen sich mit wachsendem n „periodisch“! (Wie weit?)



Nun können wir auch das in der Audiotechnik wichtige *Shannonsche Abtasttheorem* plausibel machen: Die Abtastrate (Samplingfrequenz) muss offenbar größer sein als die doppelte abzutastende Frequenz. (*Fourierücktransformation liefert eine exakte Rekonstruktion!*) Und weiterhin können wir nunmehr bei jedem Funktionenplotter das Aliasing gezielt erzeugen, vorausgesetzt, dass wir die Stützstellendichte (und damit die „Sampling-Frequenz“) kennen oder diese wählen können. Andererseits: Wenn wir bei einem Funktionenplotter Aliasing entdecken, können wir durch Variation des aktuellen Frequenzfaktors daraus die aktuelle Abtastrate (bei Taschencomputern: die horizontale Bildschirmauflösung) ermitteln. Bei Audiodateien vermeidet man Aliasing bereits bei der Digitalisierung (Shannon!).

6 Die beiden Hauptsätze für Funktionenplotter

Dieses medienkundlich-medienerzieherische Anliegen führt uns schließlich zu den beiden Hauptsätzen für Funktionenplotter: (1) **Jeder Funktionsplot ist stetig.** (Denn ein Funktionsplot ist selbst eine Funktion!) (2) **Der Funktionsplot trigonometrischer Funktionen ist meist falsch.** (Dies ergibt sich aus der periodischen Wiederholung der Fehlsimulationen!)

7 Literatur

Hischer, Horst: *Mathematikunterricht und Neue Medien – Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht.* Mit Beiträgen von Anselm Lambert, Thomas Sandmann und Walther Ch. Zimmerli. Hildesheim: Franzbecker 2002, 420 Seiten.