Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint Nr. 126

Mittelwertfunktionen und Strophoiden

Zur Genese einer Entdeckung durch Axiomatisierung und Visualisierung

Horst Hischer

Saarbrücken 2005

Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes

Preprint No. 126
submitted: February 03, 2005

Mittelwertfunktionen und Strophoiden

Zur Genese einer Entdeckung durch Axiomatisierung und Visualisierung

Horst Hischer

Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Postfach 15 11 50
D–66041 Saarbrücken
Germany
hischer@math.uni-sb.de

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany

Fax:	+ 49 681 302 4443
e-Mail:	preprint@math.uni-sb.de
WWW:	http://www.math.uni-sb.de/

Mittelwertfunktionen und Strophoiden

Zur Genese einer Entdeckung durch Axiomatisierung und Visualisierung [1]

von

Horst Hischer, Saarbrücken

Zusammenfassung: Die Pythagoreer entwickelten mit ihren Mesotäten eine erste Theorie von Mittelwerten. In Verbindung mit dem nach Nicolas Chuquet (1484) benannten Mittelwert ist eine Axiomatisierung aller zweistelligen numerischen Mittelwertfunktionen möglich, welche die pythagoreischen Mittelwerte als Spezialfälle einschließt. Experimente mit unterschiedlichen Mittelwertvisualisierungen von Pappus bis in unsere Zeit, insbesondere mit Werkzeugen zur Beweglichen Geometrie, führen zur Entdeckung eines zuvor nicht vermuteten Zusammenhangs zwischen zweistelligen Mittelwertfunktionen und Strophoiden.

Summary: The Pythagoreans founded the first theory of mean values. In connection with the mean value named after Nicolas Chuquet (1484) it is possible to give axioms for two-variable mean value functions including in particular the Pythagorean mean values. Experiments with different visualizations of mean values from Pappus up to now, especially using software tools for kinematic geometry, exhibit an unexpected association between two-variable mean value functions and strophoids.

1 Einleitung

Dieser Beitrag entstand zunächst nur aus dem Wunsch, meine in einem langen Zeitraum gewachsenen publizierten bzw. referierten Einsichten über Mittelwertbildung als einer fundamentalen Idee der Mathematik überblicksartig und konzentriert zusammenzufassen. Aber es wurde mehr: So besteht zwar *ein* wesentlicher *Aspekt* dieser Einsichten in der *Möglichkeit der Axiomatisierung des Begriffs „zweistellige Mittelwertfunktion*“ unter Berücksichtigung der historischen Entwicklung von den Babyloniern über die Pythagoreer bis hin zu Chuquet am Beginn der Neuzeit, und *ein anderer* besteht in der *Möglichkeit der Visualisierung von Mittelwertfunktionen,* angefangen bei Pappus bis hin zu den vielfältigen Darstellungen in unserer Zeit, etwa im *Handbook of Means* von Peter Bullen. Doch die Analyse solcher Visualisierungen unter Bezug auf den gewählten Axiomatisierungsansatz in Verbindung mit einer Darstellung durch Neue Medien, insbesondere mit Software-Werkzeugen zur Beweglichen Geometrie, führte dann zur Entdeckung überraschender Zusammenhänge zwischen Mittelwertfunktionen und Strophoiden – mit dem Ergebnis, dass es zu jeder Mittelwertfunktion eine sog. *„strophoidale Darstellung“* gibt. Zugleich eröffnet sich eine Fülle noch zu beantwortender bzw. zu untersuchender Fragen.

[1] Ich danke Anselm Lambert (Saarbrücken) für die kritisch-konstruktive Begleitung dieser Abhandlung, und ich danke Peter Bullen (Vancouver, Kanada) für manch wertvollen Hinweis.

2 Zu den historischen Wurzeln des Funktionsbegriffs

Das Wort „Funktion“ wurde im mathematischen Kontext wohl zuerst von Leibniz gebraucht, [2] und zwar 1673 in seiner (unpublizierten) Abhandlung *„Methodus tangentium inversa, seu de functionibus“*, was etwa wie folgt übersetzt werden könnte: *„Eine Methode, Tangenten umzukehren – oder: über Funktionen“*. Jedoch hatte das Wort „Funktion“

> […] bei Leibniz noch nicht die heutige mathematische Bedeutung, vielmehr wird es im Sinne von „funktionell“ als Aufgabe, Stellung oder Wirkungsweise eines Glieds innerhalb eines Organismus bzw. einer Maschine verstanden […] [3]

Bei diesem *„inversen Tangentenproblem“* (das also „funktioniert“), geht es dann darum,

> […] von einer Eigenschaft der Tangente einer Kurve deren Koordinaten zu bestimmen, nach einer Stammfunktion zu suchen. [4]

Erst 1694 publizierte Leibniz dann das Wort „Funktion“ im Juni-Heft der Fachzeitschrift *Acta Eruditorum* (etwa: „Gelehrtenzeitschrift“) – zunächst für die *Subtangente einer Kurve*. Im Jahre 1698 entwickelte sich daraus ein berühmter Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann I Bernoulli, und

> […] schon im Juni 1698 spricht Bernoulli von irgend welchen Functionen beim isoperimetrischen Problem. Leibniz antwortet Ende Juli, er sei entzückt, dass Bernoulli das Wort grade so gebrauche wie er selbst. Im August schlägt Bernoulli vor, eine Function von x durch X oder durch ξ zu bezeichnen. Leibniz billigt diesen Vorschlag […]. [5]

So gilt (bzw. galt!) vielfach Leibniz als Begründer des mathematischen Funktionsbegriffs. Gegen solch eine Deutung ist allerdings einzuwenden, dass hierbei der Bezeichner (oder: der Name) für einen Begriff (hier: „Funktion“) mit dessen Inhalt identifiziert wird. Jedoch sind Begriffs*name* und Begriffs*inhalt sorgsam zu unterscheiden*! Hält man nun Ausschau nach den Wurzeln bzw. nach der historischen Entstehung des Funktions*begriffs*, so darf man also nicht (nur!) nach dem Auftreten des Wortes „Funktion“ suchen, sondern vielmehr ist zunächst zu klären, was sich *für uns heute* inhaltlich mit dem Wort „Funktion“ verbindet und wie *wir* mit Funktionen umgehen, was also (subjektiv) den Funktions-*Begriff* ausmacht!

Das scheint ein relativ einfaches Unterfangen zu sein: So definierte Felix Hausdorff 1914 geordnete Paare und darauf aufbauend *Funktionen als* (wie wir heute sagen würden) *rechtseindeutige Relationen*, was schließlich in den Zeiten des Bourbakismus zur Blüte gebracht worden ist. Zugleich ist zu betonen, dass *Hausdorffs Definition wohl auch heute noch die einzige allgemein formal zufrieden stellende und zugleich auch weit reichende ist.*

---

[2] Vgl. hierzu und für das Folgende die Ausführungen in [2002 a, 15 f.], was eine Abkürzung ist für [Hischer 2002 a, 15 f.]; alle Beiträge [Hischer wxyz] werden hier mit [wxyz] abgekürzt.

[3] [Krüger 2000, 44]

[4] [Krüger 2000, 44]

[5] [Cantor 1898, 438], zitiert in [2002 a, 16].

Dies hat aber erhebliche Konsequenzen, kann doch dann z. B. das Symbol $f(x)$ *nicht mehr* als ein *Zeichen für eine Funktion* dienen, sondern nur noch für einen Funktionswert, evtl. für einen Funktionsterm (so denn ein solcher existieren sollte). Und natürlich kann man dann nicht mehr von „Funktionen einer Veränderlichern“ und von „Funktionen mehrerer Veränderlicher“ sprechen, denn wo sollen bei einer *Relation* (einer Menge!) „Veränderliche“ sein? Konsequenterweise spricht man dann von „einstelligen Funktionen“ und allgemein von „mehrstelligen Funktionen“, und somit werden in dieser Abhandlung *„Zweistellige Mittelwertfunktionen“* und nicht etwa „Mittelwertfunktionen von zwei Veränderlichen“ untersucht.

Gleichwohl feiern die Bezeichnungen „Funktionen mehrerer Veränderlicher“ und ferner „abhängige“ bzw. „unabhängige“ Variable in letzter Zeit wieder fröhliche Urständ, obwohl die formale Mathematik sie doch längst ausgerottet glaubte. Wie ist so etwas in der Mathematik als *exakter Wissenschaft par excellence* möglich? So lehrt der Blick in diverse aktuelle Fachbücher, dass wir in der Mathematik und ihren Anwendungen heutzutage kein einheitliches, rigoroses Verständnis dessen vorfinden, was unter „Funktion“ zu verstehen ist. [6] Vielmehr begegnen wir hier einem *kontextabhängigen Begriffsverständnis,* das sich in seiner Symbolik je nach Interessen- und Problemlage der damit arbeitenden Fachleute ausdrückt. Vollrath spricht in diesem Zusammenhang vom *„funktionalen Denken“*, und er schreibt: [7]

> Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist.

Diese dialektische, zirkulär erscheinende Kennzeichnung ist treffend. So ist der historisch gewachsene Funktionsbegriff derart reichhaltig und zugleich vage, dass wir die *tatsächlichen Verwendungszusammenhänge* in den Blick nehmen müssen, insbesondere etwa: [8]

1. *eindeutige Zuordnung,*
2. *Abhängigkeit einer Größe* („abhängige Variable“) *von einer anderen* („unabhängige Variable“), speziell auch zeitabhängige Größen,
3. (empirische) *Wertetabelle,*
4. *Kurve, Graph, Datendiagramm, Funktionsplot,*
5. *Formel.*

So identifizieren viele Numeriker (auch heute noch!) „Funktion“ mit „Tabelle“, und in der Tat liegen für den Anwender Funktionen meist tabelliert vor. Früher waren es z. B. Logarithmentafeln und trigonometrische Tafeln, und bei den heutigen Funktionenplottern werden rechnerintern Wertetabellen erzeugt, die dann als koordinatisierte Pixel auf einem Display dargestellt werden.

6 Vgl. [2002 a, 1 ff.] und [2002 b, 319 ff.].
7 [Vollrath 1989, 3]
8 Vgl. wieder [2002 a, 1 ff.] und [2002 b, 319 ff.].

Wenn wir nun unser Augenmerk auf die o. g. *tatsächlichen Verwendungszusammenhänge* richten, so begegnet uns der Funktionsbegriff kulturhistorisch erstmals vor knapp 4000 Jahren bei den Babyloniern in der Gestalt von **Tabellen**. Ein berühmter Beleg dafür ist die in den 1920er Jahren bei Senkereh (dem antiken Larsa, im Gebiet des heutigen Irak) gefundene Keilschrifttafel **Plimpton 322**, deren *Transliteration* in Abb. 1 wiedergegeben ist. [9]

1;59,0,15	(1.9834)	1,59	(119)	2,49	(169)	1
1;56,56,58,14,50,6,15	(1.9492)	56,7	(3367)	1,20,25	*(4825)	2
1;55,7,41,15,33,45	(1.9188)	1,16,41	(4601)	1,50,49	(6649)	3
1;53,10,29,32,52,16	(1.8862)	3,31,49	(12709)	5,9,1	(18541)	4
1;48,54,1,40	(1.8150)	1,5	(65)	1,37	(97)	5
1;47,6,41,40	(1.7852)	5,19	(319)	8,1	(481)	6
1;43,11,56,28,26,40	(1.7200)	38,11	(2291)	59,1	(3541)	7
1;41,33,59,3,45	(1.6928)	13,19	(799)	20,49	(1249)	8
1;38,33,36,36	(1.6427)	8,1	*(481)	12,49	(769)	9
1;35,10,2,28,27,24,26,40	(1.5861)	1,22,41	(4961)	2,16,1	(8161)	10
1;33,45	(1.5625)	45,0	(45)	1,15,0	(75)	11
1;29,21,54,2,15	(1.4894)	27,59	(1679)	48,49	(2929)	12
1;27,0,3,45	(1.4500)	2,41	*(161)	4,49	(289)	13
1;25,48,51,35,6,40	(1.4302)	29,31	(1771)	53,49	(3229)	14
1;23,13,46,40	(1.3872)	56	(56)	1,46	*(106)	15

Abb. 1: Transliteration von Plimpton 322 – jeweils in Klammern sind auch die dezimalen Werte angegeben (Zahlenangaben mit * waren im Original falsch, sie wurden hier korrigiert)

Wie bei einem heutigen Tabellenkalkulationsprogramm erkennen wir Zeilen und Spalten, und ganz rechts stehen die Zeilennummern als Zeilenköpfe (man schrieb von rechts nach links!). Die Spalten haben sogar Spaltenköpfe, welche die Inhalte der Spalten beschreiben (diese sind jedoch in Abb. 1 weggelassen worden). Die Zahlen in Klammern sind die dezimalen Darstellungen der originalen *sexagesimalen Darstellungen*. In Spalte 1 und 2 (von rechts gezählt) stehen jeweils zwei Partner eines pythagoreischen Zahlentripels, nämlich die Längen der Hypotenuse und einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ABC (in Zeile 11 etwa $45^2 + ?^2 = 75^2$). In Spalte 3 hingegen steht nicht etwa der relativ leicht zu berechnende dritte Partner, sondern $\sec^2(\alpha)$ (das Quadrat des Sekans), wobei α derjenige Innenwinkel ist, welcher der Kathete a gegenüber liegt. In heutiger Sichtweise wurde hier also eine **zweistellige Funktion** f **tabelliert**, für die gilt:

$$f(a,c) := \frac{c^2}{c^2 - a^2} = \sec^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

Somit stehen also **zweistellige Funktionen bereits am** kulturhistorischen **Anfang der Entwicklung des Funktionsbegriffs**, wobei wir übrigens seit wenigen Jahren wissen, dass Plimpton 322 nicht etwa – wie bisher angenommen – als Dokument zahlentheoretischer Forschung anzusehen ist, sondern diese **Tafel diente Lehrenden zur Vorbereitung ihrer Übungsaufgaben**, sie war also ein Unterrichtsmittel!

---

9 Ausführlicher z. B. in [2002 a, 4–7] und [2002 b, 324–332] dargestellt.

Wir hingegen pflegen heute den Funktionsbegriff i. d. R. über einstellige Funktionen $x \mapsto f(x)$ einzuführen – also „unhistorisch“! Warum eigentlich? Das sollte nachdenklich stimmen, insbesondere, weil im Mathematikunterricht und im Physikunterricht etliche Formeln auftauchen, die alle als mehrstellige Funktionen aufzufassen sind (u. a. Flächeninhalt, Volumen, Geschwindigkeit, Leistung, …)!

Und *bei den Babyloniern* begegnen uns (aus heutiger Sicht) *noch andere zweistellige Funktionen*, nämlich **Mittelwertfunktionen**, [10] womit wir beim Thema sind:

3 Zweistellige Mittelwertfunktionen bei den Babyloniern

Der Geschichtsschreiber Jamblichus von Chalkis (ca. 250 – 330 n. Chr.) berichtet, dass **Pythagoras** von einem Aufenthalt in Mesopotamien (das bedeutet „Zwischenstromland“, zwischen Euphrat und Tigris; auch „Babylonien“) die *Kenntnis der drei klassischen Mittelwerte* mitgebracht habe. Aufgrund von dort gefundenen Keilschrifttafeln wissen wir, dass den Babyloniern bereits vor fast 4000 Jahren sowohl der Satz des Pythagoras als auch diese Mittelwerte bekannt waren, und zwar (in heutiger Notation) mit Hilfe zweistelliger Funktionen: ***arithmetisches Mittel*** $A(x, y)$, ***geometrisches Mittel*** $G(x,y)$ und ***harmonisches Mittel*** $H(x,y)$, wobei *wir uns* x und y als *positive reelle Zahlen* denken.

Yale YBC 7289 ist eine weitere berühmte Keilschrifttafel, und zwar aus der babylonischen Sammlung der Universität von Yale (***Y**ale **B**abylonian **C**ollection*). Sie wurde etwa um 1912 herum gefunden und stammt vermutlich aus der Zeit zwischen 1800 und 1600 v. Chr. (Abb. 2). Yale YBC 7289 visualisiert eine Approximation von $\sqrt{2}$, die wohl mit Hilfe eines Algorithmus errechnet wurde, der die *babylonische Ungleichungskette* $x < y \Rightarrow x < H(x,y) < G(x,y) < A(x,y) < y$ ausnutzt, wobei A, G und H *zweistellige Mittelwertfunktionen* sind.

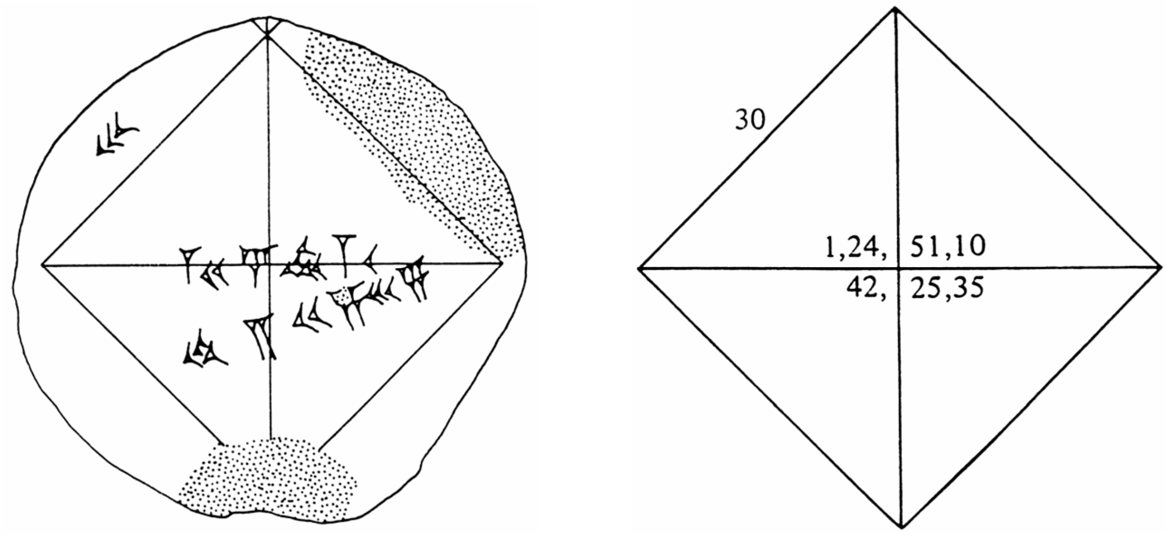

Abb. 2: Yale **YBC 7289**, links: Transkription, rechts: Transliteration.

[10] Mehr hierzu ausführlich bei [2002 c], ferner auch unterrichtsbezogen bei [2004 b].

4 Zweistellige Mittelwertfunktionen bei den Pythagoreern

Wir halten fest, dass – soweit die bisherigen archäologischen und mathematikhistorischen Kenntnisse dies belegen – der *Funktionsbegriff* kulturhistorisch bereits vor rund 4000 Jahren bei den Babyloniern *über zweistellige Funktionen* nachzuweisen ist, u. a. bei Mittelwerten. Dies sollte uns im Nachhinein nicht verwundern, wenn wir berücksichtigen, dass die Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, die ja *binäre Verknüpfungen* sind, ebenfalls als zweistellige Funktionen aufzufassen sind, z. B. $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Übrigens können wir umgekehrt die *Mittelwertbildung als Verknüpfung* deuten, z. B. $x * y := M(x, y)$ für eine Mittelwertfunktion M.

Nun haben wir gerade vernommen, dass Pythagoras die Kenntnis der drei klassischen Mittelwerte aus Mesopotamien „importiert“ hat, und es ist mathematikhistorisch belegt, dass bereits die „älteren“ Pythagoreer um etwa 500 v. Chr. diese drei Mittelwerte untersucht und darauf aufbauend eine *erste Theorie der Mittelwerte* entwickelt haben, worin wir *einen* Beginn von Mathematik als Wissenschaft sehen müssen. Diese Theorie sei kurz skizziert: [11]

Es sei ein „Mittelwert“ m zwischen (zwei positiven reellen Zahlen) x und y zu kennzeichnen, wobei das schon ein recht „vages“ Unterfangen ist, denn was ist wohl eine „Mitte“?

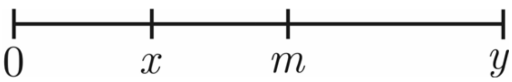

Abb. 3: m als „Mittelwert“ zwischen x und y

Die Pythagoreer beschrieben dann die drei klassischen Mittelwerte im Sinne ihrer Proportionenlehre durch „Proportionen“: [12]

$$\frac{m-x}{y-m} = \frac{x}{x}, \quad \frac{m-x}{y-m} = \frac{x}{m}, \quad \frac{m-x}{y-m} = \frac{x}{y}.$$

Auf den rechten Seiten ist der „Zähler“ unverändert, und der „Nenner“ wächst sukzessive. Die „Lösungen“ sind dann der Reihe nach:

$$M_1(x, y) := A(x, y), \;\; M_2(x, y) := G(x,y), \;\; M_3(x, y) := H(x,y).$$

Und nun setzt die geniale mathematische Leistung der Pythagoreer sein: Sie müssen (wohl rein spielerisch!?) überlegt haben, wie sich diese drei Proportionen variieren lassen, und so sind uns folgende weitere sieben Variationen überliefert: [13]

$$\frac{m-x}{y-m} = \frac{y}{x}, \; \frac{m-x}{y-m} = \frac{m}{x}, \; \frac{m-x}{y-m} = \frac{y}{m}, \; \frac{y-x}{m-x} = \frac{y}{x}, \; \frac{y-x}{y-m} = \frac{y}{x}, \; \frac{y-x}{m-x} = \frac{m}{x}, \; \frac{y-x}{y-m} = \frac{m}{x}$$

---

11 In [2002, 23 ff.] wird diese kleine pythagoreische Theorie ausführlich rekonstruiert.

12 Proportionen wurden damals von den Pythagoreern nur verbal notiert; Brüche in unserem heutigen Sinn kannten sie nicht, damit auch nicht „Zähler“ und „Nenner“. Aus heutiger Sicht können wir diese Proportionen als zweistellige Funktionen auffassen, weil sich ja (das bei den Pythagoreern positive!) m aus x und y eindeutig ergibt.

13 Vgl. die ausführliche Analyse in [2002 c, 23 ff.].

Die ersten drei der hier aufgeführten Gleichungen unterscheiden sich nur in den rechten Seiten von den vorseitig genannten: Sie sind vom Typ $(m-x)/(y-m)=s$ mit einem von x und y abhängigen Quotienten s (da ja auch der Mittelwert m selber von x und y abhängt), und mehr Möglichkeiten gibt es auch nicht, diese Gleichungen bei Erhalt der linken Seite zu variieren. Sucht man nach weiteren Möglichkeiten der Variation in der Weise, dass links das Verhältnis von Längendifferenzen und rechts das Verhältnis von Längen steht, so kommt man nach Berücksichtigung äquivalenter bzw. unsinniger Darstellungen auf die restlichen vier Gleichungen – zumindest haben die Pythagoreer diese zehn Proportionen angegeben. Eine genauere Untersuchung zeigt jedoch, dass sie eine elfte übersehen haben: [14]

$$\frac{y-x}{y-m}=\frac{y}{m}$$

Als Lösungen dieser pythagoreischen Proportionen ergeben sich damit insgesamt *elf verschiedene Mittelwerte* bzw. *Mittelwertfunktionen*, und zwar der Reihe nach $M_1 = A$, $M_2 = G$, $M_3 = H$, …, M_{11}. [15] So erhalten wir beispielsweise als Lösung M_4 von $\frac{m-x}{y-m}=\frac{x}{m}$

$$M_4(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x+y}=:K(x,y)\,,$$

in der Literatur auch „***kontraharmonisches Mittel***“ genannt. [16]

Doch wieso sprechen wir hier von so unterschiedlichen „Mittelwerten“? Was soll man sich darunter vorstellen? Diese Frage hätte zwar schon bei den drei klassischen Mittelwerten gestellt werden können, doch haben wir immerhin zur Kenntnis genommen, dass diese bei der babylonischen Approximation von Quadratwurzeln eine Rolle spielten. Aber eigentlich müssten wir eine ganz andere Frage stellen: *Was* ***ist*** *denn ein Mittelwert von zwei Zahlen?* So zeigt sich bei genauerer Analyse, dass mit „Mittelwert“ ein sehr vager Begriff verbunden ist und dass die „Mittelwertbildung“ eine sog. *fundamentale Idee der Mathematik* ist. [17]

Zurück zu den pythagoreischen Mittelwertfunktionen. Können wir ein vorläufiges Gefühl dafür entwickeln, was diese bedeuten und welche Beziehung zwischen ihnen besteht? Eine natürliche Darstellungsweise zweistelliger Funktionen sind *Flächen*, also 3D-Darstellungen in 2D-Projektion, wie sie mit vielen heutigen Funktionenplottern realisierbar sind. Das führen wir hier nicht durch und wählen statt dessen einen Weg in „reduzierter“ Darstellung:

---

14 Vgl. [1998].

15 Die Auffindung der jeweils zugehörigen Funktionsterme sei als nützliche Termumformungsübung anheim gestellt! Die Ergebnisse finden sich in [2002 c, 28].

16 Vgl. [2002 c, 29] mit *einer* möglichen Namensbegründung; vgl. eine weitere auf der übernächsten Seite! Auch [Bullen 2003, 401] verwendet diese Bezeichnung.

17 Der Zusammenhang zwischen fundamentalen Ideen und Mittelwertbildung wird in [1998; 2002 c; 2003; 2004 a] diskutiert; in diesem Rahmen kann dies nicht ausgeführt werden.

So vermittelt Abb. 3 schon einen guten Eindruck dieser verschiedenen Mittelwertfunktionen, indem man nämlich $M_i(x, y)$ nur für $y = 1$ und $0 < x \le 1$ betrachtet und dann die Graphen der elf einstelligen Funktionen $x \mapsto M_i(x, 1)$ darstellt. [18]

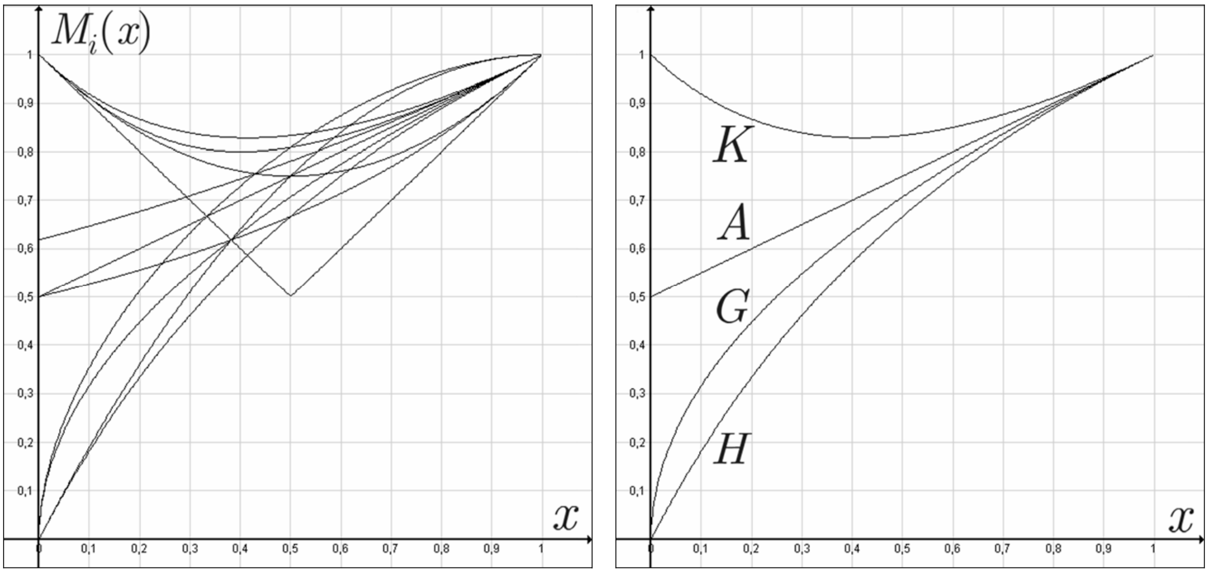

Abb. 4: pythagoreische Mittelwerte
in der Reduktion auf „einstellige“ Funktionen $x \mapsto M_i(x,1)$ für $0 \le x \le 1$; links alle,
rechts auszugsweise die drei klassischen Mittelwerte und das kontraharmonische Mittel.

Während sich links in Abb. 4 bereits visuell motivierte Bedingungen zur Betrachtung von unterschiedlichen *Mittelwert-Familien* ergeben, wird rechts die babylonische Ungleichungskette plausibel gemacht, und zugleich wird folgende Erweiterung nahe gelegt:

$$x \le y \;\Rightarrow\; x \le H(x,y) \le G(x,y) \le A(x,y) \le K(x,y) \le y \qquad (1)$$

Wie können wir diese Ungleichungskette verifizieren? Sie besteht u. a. aus $H(x,y) \le G(x,y)$, $G(x,y) \le A(x,y)$ und $A(x,y) \le K(x,y)$, die sich jeweils äquivalent in $(x-y)^2 \ge 0$ umformen lassen; sie enthält ferner $x \le H(x,y)$ und $K(x,y) \le y$, die jeweils äquivalent sind zu $x \le y$, womit alles bewiesen ist. Und man sieht schließlich, dass Gleichheit genau dann eintritt, wenn $x = y$ gilt.

Darüber hinaus kennen wir die in Abb. 5 dargestellte *Visualisierung dieser Ungleichungskette* (zunächst noch ohne Einbeziehung von $K(x,y)$), die uns **Pappus** von Alexandria (ca. 250 – ca. 350 n. Chr.) mitgeteilt hat. [19]

---

18 Diese einstelligen Funktionen nennt man z. T. auch „Mittelfunktionen“, vgl. [2002 c, 30]. Diese reduzierten Darstellungen liefern oft nur einen partiellen Eindruck von den zugrunde liegenden zweistelligen Funktionen, es sei denn, man beschränkt sich auf *homogene* Mittelwertfunktionen: So lässt sich zeigen, dass dann die zweistelligen Mittelwertfunktionen aus den Mittelfunktionen vollständig rekonstruierbar sind (vgl. [Lambert & Herget 2004, 61 f.]). 3D-Darstellungen als Flächen ermöglichen weitere Einsichten in Mittelwertfunktionen.

19 Vgl. [2002 c, 12].

Die Gültigkeit der in Abb. 5 notierten Behauptungen folgt mit dem Höhensatz *und* mit dem Kathetensatz des Euklid unter Beachtung der leicht zu verifizierenden Gleichheit von $H(x,y) \cdot A(x,y) = xy = \big(G(x,y)\big)^2$ bzw. $G(H(x,y),A(x,y)) = G(x,y)$, und die Gültigkeit von $H(x,y) < G(x,y) < A(x,y) < y$ für $x < y$ ist unmittelbar aus der Zeichnung ablesbar. Und wie erkennen wir $x < H(x,y)$? Wir denken uns einen Kreis um den Halbkreismittelpunkt mit dem Radius $A(x,y) - x$.

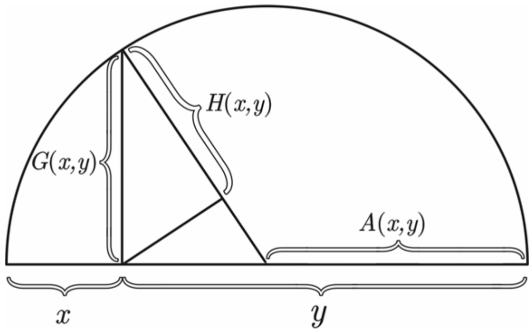

Abb. 5: Visualisierung der babylonischen Ungleichungskette nach Pappus

Ferner erkennen wir leicht $K(x,y) = x + y - 2xy\,/(x+y) = 2A(x,y) - H(x,y)$, also $A(x,y) = \frac{1}{2}(H(x,y) + K(x,y))$, und das ist eine weitere Deutung für die mögliche Herkunft der Bezeichnung „*kontra*harmonisch"!

Analog zu $G(H(x,y),A(x,y)) = G(x,y)$ erkennen wir $A(H(x,y),K(x,y)) = A(x,y)$. Schreiben wir noch $K(x,y) = A(x,y) + (A(x,y) - H(x,y))$, so erscheint sogar $K(x,y)$ in Abb. 5, und zwar als Länge eines Streckenzugs. Sodann können wir in Abb. 5 sowohl $K(x,y) \geq A(x,y)$ als auch $K(x,y) \leq y$ ablesen.

4 Das Chuquet-Mittel [20]

Wir springen nun von den Pythagoreern über Pappus weiter zu dem französischen Arzt **Nicolas Chuquet** (1445 – 1488), der im Jahre 1484 sein Werk *„Le Triparty en la sciences des nombres"* vollendete *(Dreiteilige Abhandlung über die Wissenschaft von den Zahlen)*. Moritz Cantor schreibt zum ersten Teil: [21]

> Den Abschluss des I. Theiles bildet die von Chuquet als sein Eigenthum in Anspruch genommene R e g e l d e r m i t t l e r e n Z a h l e n, *la rigle des nombres moyens*. Sie besteht aus der Behauptung, der Zahlenwerth $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ liege immer zwischen $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$.

Das würden wir heute wie folgt präzise als Theorem formulieren können:

$$\text{Für alle } a,b,c,d \in \mathbb{R}_+ \text{ gilt: } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Dieser Sachverhalt lässt sich durch algebraische Umformung leicht beweisen, aber es geht auch anders: Abb. 6 stellt die zu beweisende Behauptung dar, und sie *ist* zugleich ihr eigener Beweis, denn auch diese *visuelle Argumentation* ist streng!

Zu Ehren Chuquets heißt $\frac{a+c}{b+d}$ **Chuquet-Mittel** von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. [22]

---

20 Vgl. hierzu die ausführliche Untersuchung in [2002 c, 31 ff.].

21 [Cantor 1892, 322]; Moritz Cantor war einer der bedeutendsten Mathematikhistoriker in der zweiten Hälfte des 19. Jhs.; er ist nicht verwandt mit Georg Cantor, dem Begründer der Mengenlehre.

22 [Herget 1985]; Peter Bullen wird das Chuquet-Mittel in einem Nachtrag zu seinem Handbuch erwähnen, und er weist darauf hin, dass das Chuquetmittel dann ein *gewichtetes arithmetisches Mittel* sei, nämlich $\left(\frac{1}{d}\cdot\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)/\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)$ – in Übereinstimmung mit den folgenden Seiten!

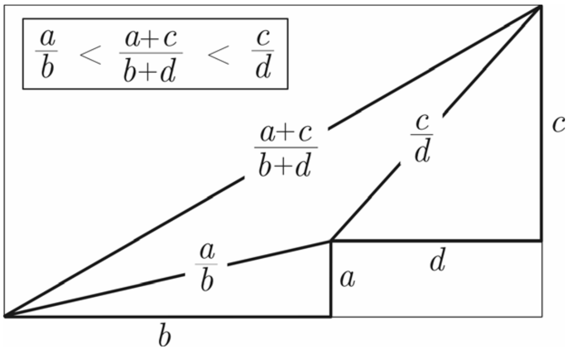

Abb. 6: Visualisierung des Chuquet-Mittels

Interpretiert man in Abb. 6 die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ als Steigungen der Hypotenusen der dort erkennbaren rechtwinkligen Dreiecke, so erscheint das Chuquet-Mittel als *mittlere Steigung* der Hypotenuse des „Summendreiecks“ und also als ein „*Mittelwert*“.

Doch nun stoßen wir auf ein ernstes Problem: Die beim Chuquet-Mittel verwendeten „Brüche“ treten hier nämlich *nicht* in der (mathematisch üblichen) Rolle von Äquivalenzklassen auf, sondern *nur als* deren *Repräsentanten* (was aber typisch ist für den „Alltagsumgang“ mit Brüchen und was zugleich zu vielen Verständnisproblemen führt!). Das bedeutet nun, dass das *Chuquet-Mittel nicht repräsentantenunabhängig* ist, oder anders:

- Die durch $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{a+c}{b+d}$ definierte Bruchaddition ist *nicht wohldefiniert*!

Dies erkennt man an einem Beispiel: So ist zwar $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, hingegen ist $\frac{4+1}{10+10} \neq \frac{2+1}{5+10}$.

Wir müssen an dieser Stelle zur Kenntnis nehmen, dass das Symbol $\frac{a}{b}$, das wir „Bruch“ nennen, zwar in der Mathematik „sauber“ als Äquivalenzklasse von Zahlenpaaren durch $\frac{a}{b} := \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid ay = bx\}$ definiert werden kann, jedoch im „Rest der Welt“ mal Äquivalenzklasse und mal Repräsentant (also Zahlenpaar!) und damit faktisch doppeldeutig ist (und bei genauem Hinsehen sogar teilweise in der Mathematik, wobei diese Doppeldeutigkeit dann situativ richtig interpretiert wird bzw. werden muss, so etwa bei den *Medianten* in der Zahlentheorie).[23]

Können wir vielleicht von zwei positiven reellen Zahlen x, y trotz der *Nicht-Wohldefiniertheit* deren Chuquetmittel bilden, das (lax!) mit $C(x,y)$ bezeichnet sei? Dazu benötigen wir eine Bruchdarstellung (aus den unendlich vielen!), etwa $\frac{x}{1}$ und $\frac{y}{1}$, und wir würden dann $C(\frac{x}{1}, \frac{y}{1}) = \frac{x+y}{2}$ erhalten, also das arithmetische Mittel von x und y. Wenn wir diese Brüche (genauer: ihre Repräsentanten!) wieder als Steigungen von Hypotenusen in rechtwinkligen Dreiecken interpretieren, liefert Abb. 7 eine Veranschaulichung dieses Sachverhalts, und das Chuquetmittel erscheint wiederum als *mittlere Steigung* und damit als „Mittelwert“ von x und y. Strecken wir nun das zweite Steigungsdreieck zentrisch mit einem positiven Streckfaktor s, so können wir als „mittlere Steigung“ m offenbar *jeden Wert* zwischen x und y erhalten, wobei s zwischen 0 und ∞ variiert (Abb. 8), d. h., wir können jeden „Mittelwert“ m zwischen x und y mit einem geeigneten s wie folgt darstellen:

$$m = \frac{x + sy}{1 + s}$$

Daraus erhalten wir $s = \frac{m-x}{y-m}$, d. h., dieser Streckfaktor s ist i. A. von x und y abhängig. Das gibt zu folgender Vermutung Anlass:

---

23 Und Schüler(innen) und Lehrer(innen) kennen dies zumindest aus dem Mathematikunterricht: Wenn man z. B. von 10 erreichbaren Punkten 7 erreicht, so ist $\frac{7}{10}$ ein Repräsentant, jedoch *keine* Äquivalenzklasse!

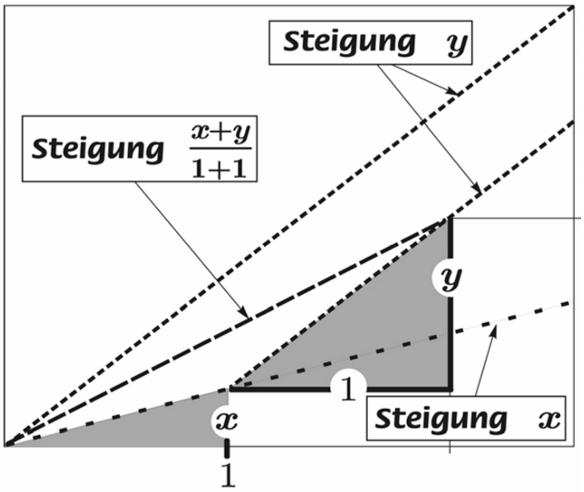

Abb. 7: Chuquetmittel von x und y ?

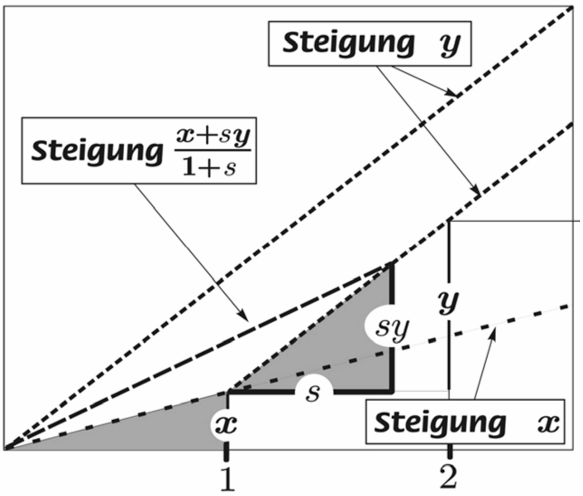

Abb. 8: Chuquetmittel von x und y ?

Ist M eine beliebige „Mittelwertfunktion" mit $M\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$, so gibt es dazu stets eine *„Streckfaktorfunktion"* S gemäß $S\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ mit

$$M(x,y) = \frac{x + y \cdot S(x,y)}{1 + S(x,y)} \qquad (2)$$

Ist umgekehrt eine solche Funktion S beliebig vorgegeben, so ist mittels (2) möglicherweise eine Mittelwertfunktion erklärt. Die Untersuchung dieser beiden Vermutungen setzt allerdings voraus, dass der Begriff „Mittelwert" axiomatisch sinnvoll erklärt ist, d. h.: Es ist zu klären, was *wir* unter einem numerischen „Mittelwert" verstehen *wollen*!

Betrachten wir nun nochmals $s = \frac{m-x}{y-m}$, so wird auffallen, dass wir über Chuquet zurück kommen zu den Pythagoreern: Denn auf der rechten Seite steht gerade dasjenige Größenverhältnis, das in den definierenden Proportionen der ersten sechs pythagoreischen Mittelwerte vorkam!

Somit haben wir also über die historischen Betrachtungen nicht nur die Vermutung gewonnen, dass das *Chuquetmittel* dazu geeignet ist, beliebige numerische Mittelwerte darzustellen, um damit zu einer *Theorie numerischer Mittelwerte* gelangen zu können, sondern wir sehen zugleich, dass der Grundstein hierzu bereits vor rund 2500 Jahren bei den Pythagoreern gelegt worden ist, die dabei „nur" variierend und verallgemeinernd auf die rund 4000 Jahre alten drei „klassischen" babylonischen Mittelwerte zurückgegriffen haben.

5 Zur Axiomatisierung zweistelliger Mittelwertfunktionen

Wir wenden uns nun der gerade gewonnenen Vermutung zu, dass jede gemäß (2) erklärte Funktion eine Mittelwertfunktion ist und dass umgekehrt jede Mittelwertfunktion eine Darstellung gemäß (2) ermöglicht. Hierzu fehlt uns jedoch noch eine *Argumentationsbasis* [24], weil noch nicht präzisiert worden ist, was „zweistellige Mittelwertfunktion" bedeutet bzw. bedeuten *soll*!

[24] Vgl. [Fischer & Malle 1985, 180 ff.].

Nun könnten wir den Spieß umdrehen und diese Vermutung geradezu als Definition benutzen – ein durchaus üblicher Weg in der Mathematik! Andererseits können wir uns fragen, ob wir denn jenseits von (2) weitere bzw. andere Vorstellungen von dem haben, was für uns ein „Mittelwert“ von zwei Zahlen ist, und dann versuchen, diese Vorstellungen zu präzisieren. Ein solcher Weg führt zu einem Axiomensystem, das zugleich eine rigorose Beweisgrundlage für eine darauf aufbauende mathematische Theorie ist.

In [Hischer & Lambert 2003, 9-14] wird ein solcher Weg vorgestellt, wobei insbesondere auch die Freiheit bzw. die relative „Willkür“ bei der Wahl solcher Axiome im Sinne eines „Wollens“ [25] mit den entsprechenden Konsequenzen herausgestellt wird. Im Folgenden werden nur die wesentlichen Ergebnisse dargestellt:

Wie gehen wir vor? Mit Blick auf das geometrische Mittel $\sqrt{xy}$ und das harmonische Mittel $\frac{2xy}{x+y}$ ist es nahe liegend, sich auf Mittelwerte von $x, y \in \mathbb{R}_+$ zu beschränken. Solche Mittelwerte werden wir in Verallgemeinerung von $G(x,y)$, $H(x,y)$ usw. mit $M(x,y)$ bezeichnen, wobei also M eine zweistellige Funktion von $\mathbb{R}_+^2$ in $\mathbb{R}_+$ ist. Ferner werden wir (ohne Einschränkung der Allgemeinheit?) $x \le y$ voraussetzen und dann eine sehr einfache Erwartung an einen Mittelwert $M(x,\, y)$ durch die Forderung $x \le M(x,y) \le y$ aussprechen können. Ob das aber schon ausreicht, unsere (welche denn?) Vorstellung von „Mittelwert“ zu präzisieren? – Da ist noch etwas zu tun!

$x \le y$ beinhaltet nun die beiden Fälle $x < y$ und $x = y$. Im zweiten Fall ist es klar, dass dann $M(x,x) = x$ zu fordern ist, weil wir sonst sicherlich nicht von einer „Mitte“ sprechen können. Und im ersten Fall ist es sinnvoll, anstelle von $x \le M(x,y) \le y$ nunmehr verschärft $x < M(x,y) < y$ zu fordern, denn ein Randwert wird wohl kaum mehr als „Mitte“ anzusprechen sein – oder etwa doch? Bereits hier zeigt sich, dass man auch anders entscheiden könnte, dass es also auf das jeweilige *„Wollen“* ankommt (s. o.)! – Was würde wohl $x \le M(x,y) \le y$ liefern?

Für die ersten beiden Axiome werden wir also $x < y \Rightarrow x < M(x,y) < y$ und $M(x,x) = x$ wählen. Nun blicken wir zurück zu den Proportionen für die pythagoreischen Mittelwerte: Bei der letzten errechnet man z. B. $M_{11}(x,\, y) = y^2/(2y - x)$, und wir sehen, dass $M_{11}(x,\, y) = M_{11}(y,\, x)$ nicht für alle x, y gilt, dass es also nicht-symmetrische Mittelwertfunktionen gibt.

Das Axiom $x < y \Rightarrow x < M(x,y) < y$ ist also für sich genommen noch zu wenig!

Damit wir uns nun nicht von vornherein der Möglichkeit berauben, auch nicht-symmetrische Mittelwertfunktionen untersuchen zu können, müssen wir das erste Axiom verschärfen und erhalten damit folgende Möglichkeit zur Definition von „Mittelwertfunktion“:

---

25 Vgl. [Fischer & Malle 1985, 151].

***Definition 1**: Es sei* $M : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$.

M *ist genau dann eine **Mittelwertfunktion**, wenn für alle* $x, y \in \mathbb{R}_+$ *gilt:*

(M1) $x < y \Rightarrow x < M(x,y) < y \ \wedge \ x < M(y,x) < y$

(M2) $M(x,x) = x$

Den Funktionswert $M(x,y)$ nennen wir in diesem Fall **Mittelwert** von x und y. Da es nun aber auch symmetrische Mittelwertfunktionen gibt, z. B. A, G, H, wird es sinnvoll sein, diese Teilmenge gesondert und mit einem eigenen Namen zu betrachten:

***Definition 2**: Es sei* M *eine Mittelwertfunktion.*

*M ist genau dann eine **symmetrische Mittelwertfunktion**, wenn für alle* $x, y \in \mathbb{R}_+$ *gilt:* [26]

(M3) $M(y,x) = M(x,y)$

Wir haben damit die wesentlichen Vorbereitungen getroffen, um eine effektive *Maschine zur Erzeugung von konkreten Mittelwertfunktionen* vorzustellen, die durch das Chuquet-Mittel *historisch verankert* [27] ist. Dazu führen wir noch einen nahe liegenden Hilfsbegriff ein:

***Definition 3**: Es sei* $M : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ *eine Funktion.*

M *ist genau dann eine **Chuquet-Funktion**, wenn eine Funktion* S *von* $\mathbb{R}_+^2$ *in* $\mathbb{R}_+$ *existiert, so dass für alle* $x, y \in \mathbb{R}_+$ *gilt:*

$$M(x,y) = \frac{x + y \cdot S(x,y)}{1 + S(x,y)}$$

Damit haben wir die bisherigen historischen Betrachtungen aufgegriffen, und dann lässt sich unter Rückgriff auf obige Axiome (**M1**) und (**M2**) beweisen:

***Satz 1**: Jede Chuquet-Funktion ist eine Mittelwertfunktion.*

***Satz 2**: Jede Mittelwertfunktion ist eine Chuquet-Funktion.*

Wir haben also unsere Definitionen so eingerichtet, dass gilt: *Mittelwertfunktionen* und die auf das Chuquet-Mittel zurückgehenden *Chuquetfunktionen* sind (im Wesentlichen) dasselbe! Insbesondere bedeutet das: Mit Hilfe des Chuquet-Mittels, das sich rückblickend bereits in der pythagoreischen Theorie findet, können wir sämtliche numerischen Mittelwerte im Sinne von Definition 1 beschreiben!

Diesen Sachverhalt können wir mit Hilfe von Definition 3, Satz 1 und Satz 2 auch wie folgt notieren:

---

[26] In [Hischer & Lambert 2003] wurde aus strukturmathematischen Gründen die Bezeichnung „kommutative …“ statt „symmetrische …“ gewählt, was jedoch im hier vorliegenden Kontext keinen Vorteil brächte.

[27] Vgl. [1998; 2004 a].

***Folgerung** 3: Zu jeder Mittelwertfunktion M existiert eine Funktion S mit*

$$S\colon {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R}_+ \quad \textit{und} \quad M(x,y) = \frac{x + y \cdot S(x,y)}{1 + S(x,y)} \quad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Es zeigt sich ferner, dass diese „Streckfaktorfunktion“ [28] S bis auf die Werte $S(x,x)$ sogar eindeutig bestimmt ist. Durch zusätzliche Forderungen an M (Stetigkeit in zu präzisierendem Sinn) könnte man auch die Eindeutigkeit auf ganz ${\mathbb{R}_+}^2$ sichern (also auch für die Werte von $S(x,x)$). Weiterhin ergibt sich, dass eine *beliebige Mittelwertfunktion* M (mit der zugehörigen Streckfaktorfunktion S) *genau dann symmetrisch* ist, wenn $S(x,y) \cdot S(y,x) = 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ mit $x \neq y$ gilt, wobei diese Gleichung dann z. B. durch $S(x,y) := f(x,y) / f(y,x)$ mit einer zweistelligen Funktion f gelöst wird! Damit steht ein leistungsfähiges Instrument zur Konstruktion symmetrischer Mittelwertfunktionen zur Verfügung, weil man ja vice versa nur eine *beliebige zweistellige Funktion f* von $\mathbb{R}_+^2$ in $\mathbb{R}_+$ vorgeben muss!

Beispiele: Mit $f(x,y) := 2x + y$ ist $S(x,y) = \frac{2x+y}{x+2y}$, es folgt

$$M(x,y) = \frac{x + S(x,y) \cdot y}{1 + S(x,y)} = \frac{x^2 + 4xy + y^2}{3(x+y)} = \tfrac{2}{3} A(x,y) + \tfrac{1}{3} H(x,y).$$

M ist erkennbar symmetrisch. Abb. 9 zeigt die Darstellung von $x \mapsto M(x,1)$, eingebettet in Abb. 4 (rechts). Dem Erfindungsreichtum zur Erzeugung konkreter Mittelwertfunktionen sind nun keine Grenzen gesetzt – gerade im Mathematikunterricht!

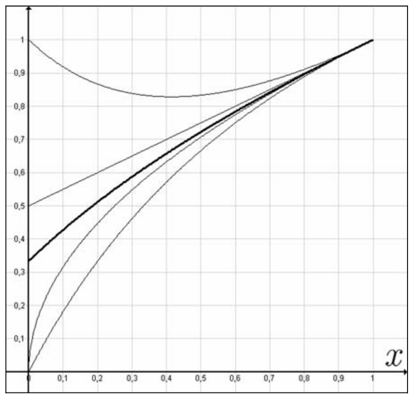

Abb. 9: Darstellung einer willkürlich erzeugten Mittelwertfunktion als Einbettung in Abb. 4 (rechts)

Und es drängt sich das *inverse Problem* auf: Eine Mittelwertfunktion M sei gegeben. Gesucht ist eine Funktion f zur *kanonischen Darstellung* von $M(x,y)$:

$$M(x,y) = \frac{x + y \cdot S(x,y)}{1 + S(x,y)} = \frac{x \cdot f(y,x) + y \cdot f(x,y)}{f(y,x) + f(x,y)}$$

So findet man z. B. $H(x,y) = \dfrac{xy + yx}{x + y}$ und $G(x,y) = \dfrac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$.

Wie erhält man das? Aus dem Ansatz gemäß Folgerung 3 folgt beim harmonischen Mittel zunächst $S(x,y) = \frac{x}{y}$. Nun ist ein f zur Darstellung $S(x,y) = f(x,y) / f(y,x)$ gesucht! Scharfes Hinsehen führt sofort zum Ansatz $f(x,y) := x$, heureka! Und beim geometrischen Mittel erhalten wir analog zunächst $S(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$, woraus sich

$$G(x,y) = \frac{x + y\sqrt{\frac{x}{y}}}{1 + \sqrt{\frac{x}{y}}} \quad \text{bzw. durch Erweitern} \quad G(x,y) = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \quad \text{ergibt.}$$ [29]

---

[28] Vgl. im Anschluss an Abb. 7.

[29] Anselm Lambert verdanke ich den Hinweis, dass Fragestellungen in diesem Zusammenhang zu *sinnhaft eingebetteten Termumformungsübungen* führen!

Hieraus können wir den (nicht eindeutigen) Ansatz $f(x,y) := \sqrt{x}$ ablesen! Und auch $A(x,y)$ ist kanonisch darstellbar: $A(x,y) = \frac{x\cdot 1 + y\cdot 1}{1+1}$, also hilft $f(x,y) := 1$.

Versuchen wir es zum Schluss für das kontraharmonische Mittel: $K(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

Zunächst erhalten wir über Folgerung 3

$$S(x,y) = \frac{K(x,y)-x}{y-K(x,y)} = \frac{(x^2+y^2)-(x^2+xy)}{(xy+y^2)-(x^2+y^2)} = \frac{y(y-x)}{x(y-x)} = \frac{y}{x} \text{ (für } x \neq y\text{)}.$$

Hieraus errät man den Ansatz $f(x,y) := y$, was zu

$$K(x,y) = \frac{x\cdot x + y \cdot y}{x+y} \text{ führt, heureka!}$$

Die vorübergehend erforderliche Einschränkung $x \neq y$ ist hier nicht mehr nötig, und entsprechend gilt dies auch für die anderen oben angedeuteten Beispiele. Vergleichen wir diese Darstellung mit der für das harmonische Mittel, so wurde hier nur $f(x,y) := x$ durch $f(x,y) := y$ ersetzt, also durch die „Transponierte" – auch dieser Sachverhalt könnte die Bezeichnung „*kontra*harmonisch" plausibel machen!

6 Darstellungen von Mittelwertfunktionen

6.1 Zum Zusammenspiel zwischen Darstellungen und Vorstellungen

Was der Geometer an seiner Wissenschaft schätzt, ist, dass er sieht, was er denkt.

Felix Klein [30]

Diese von Felix Klein betonte Wertschätzung der Visualisierung mathematischer Sachverhalte haben wir schon bei den Veranschaulichungen der babylonischen Ungleichungskette nach Pappus in Abb. 5 und der des Chuquetmittels in Abb. 6 kennen gelernt. In derartigen Visualisierungen begegnet uns exemplarisch das für mathematische Entdeckungen wichtige *Zusammenspiel zwischen Darstellungen und Vorstellungen*, das in den letzten Jahrzehnten insbesondere in der mathematischen *Lehre* an den Universitäten aufgrund der Einflüsse der wichtigen Bemühungen um eine exakte Grundlegung der Mathematik seit Whitehead und Russell bis hin zu Bourbaki oft in den Hintergrund getreten ist und auch (u. a. über die solchermaßen ausgebildeten Lehrkräfte) Spuren im Mathematikunterricht hinterlassen hat – insbesondere im Geometrieunterricht.

Wenn ich hier die mathematische *Lehre* betone, so soll damit zugleich herausgestellt werden, dass dieses o. g. Zusammenspiel in der universitären Lehre vielfach *nicht explizit* auftritt, obwohl doch die Lehrenden es für sich selber zur Verfügung haben! So gab (gibt?) es Vorlesungen über (Analytische) Geometrie ohne Bilder! Dabei ist nachvollziehbar, weshalb Visualisierungen in der mathematischen Lehre an den Rand getreten sind:

[30] So bei Brieskorn & Knörrer: Ebene algebraische Kurven. Basel: Birkhäuser, 1981, S. VI.

Die durch sie bedingten möglichen Trugschlüsse sind dafür ein Anlass, während doch die axiomatische Methode eine (formal) sichere Beweisgrundlage ermöglicht. Andererseits besitzen Visualisierungen ein enormes heuristisches Potenzial, das es zu nutzen gilt, und sie können z. T. auch „wortlose Beweise“ [31] liefern, wie wir bereits exemplarisch gesehen haben.

Für den Bereich der zweistelligen Mittelwertfunktionen soll nun durch mehrere Beispiele dieses **„Zusammenspiel zwischen Bild und Term“** illustriert werden. [32]

> Wir wissen erst *dann*, was ein Mittelwert ist, wenn wir mit hinreichend vielen konkreten Mittelwerten durch deren Darstellungen Erfahrungen gesammelt haben, d. h., wenn wir selbst hinreichend viele Mittelwerte gesehen und erlebt haben.
>
> Mathematik wird von verschiedenen Menschen verschieden gedacht. Der Mathematiker und Psychologe Jacques Hadamard unterscheidet den *bildlichen Zugang* und den *algebraischen Zugang* zur Mathematik und stellt als wichtige Fähigkeit zum Machen von Mathematik heraus, flexibel zwischen den Zugängen zu wechseln. Dennoch beeinflusst der individuelle Zugang immer auch die eigene Mathematik und lässt so unterschiedliche subjektive Mathematiken entstehen […].

Und Lambert und Herget schreiben weiter: [33]

> Felix Klein unterscheidet – basierend auf seinen persönlichen Erfahrungen – drei Typen von Mathematikern: die Geometer, die sehen, was sie denken, die Analytiker, die mit den Formeln operieren, und die Philosophen, die mit Begriffen arbeiten. Auch Leone Burton beschreibt – ein Jahrhundert später, basierend auf ihren empirischen Untersuchungen – drei Denkstile bei Mathematikern (*Visual*, *Analytic*, *Conceptual*): 66 % der Mathematiker denken in oft dynamischen Bildern, 37 % denken symbolisch und formalistisch, 47 % denken in Ideen und klassifizierend; 60 % haben zwei der Zugänge, 36 % einen und 4 % alle drei […]. Selten treten sie in Reinform auf; so wird etwa in symbolischen Darstellungen (fast) immer auch verbal umschrieben oder in visuellen Darstellungen auch begrifflich argumentiert. Auf Grund des eigenen Zugangs zur Mathematik bevorzugt man gewisse Darstellungen.

6.2 Zur (Be)Deutung der klassischen Mittelwerte und naher Verwandter

Die drei klassischen Mittelwerte (arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel) waren schon den Babyloniern vor rund 4000 Jahren bekannt und bildeten über die Ungleichungskette $x < y \Rightarrow x < H(x,y) < G(x,y) < A(x,y) < y$ (wie wir sie heute notieren würden) in Verbindung mit $G(H(x,y), A(x,y)) = G(x,y)$ die Grundlage für eine Intervallschachtelung zur Approximation von Quadratwurzeln: nämlich für den babylonischen Algorithmus. [34] Die Pythagoreer untersuchten diese Mittelwerte dann im Rahmen ihrer **Proportionenlehre** vertiefend, und zwar zunächst als sog. „**mittlere Proportionale**“. So tauchen diese Mittelwerte schon sehr

---

31 Vgl. [Nelson 1993].

32 [Lambert & Herget 2004, 55]; unterstreichende Hervorhebungen nicht im Original.

33 [Lambert & Herget 2004, 56]; sie beziehen sich hier u. a. auf [Burton 1999].

34 Dargestellt in [2002 c, 10 ff.].

früh als „arithmetische Proportionale“ und als „geometrische Proportionale“ auf, während der Dritte im Bunde zunächst als „reziproke Proportionale“ bzw. als „subkonträres Mittel“ erscheint, wobei „subkonträr“ mit „entgegengesetzt“ zu übersetzen ist. [35] Wie kann man diese Namensgebungen verstehen? **Archytas von Tarent** (428 – 365 v. Chr.) teilt uns *definierende „Proportionen“* der drei Mittelwerte mit, die in heutiger Notation lauten, wenn wir wieder $x < y$ voraussetzen: [36]

Arithmetisches Mittel: $y - A(x,y) = A(x,y) - x$ (vgl. mit $\frac{m-x}{y-m} = \frac{x}{x}$)

Geometrisches Mittel: $y : G(x,y) = G(x,y) : x$ (vgl. mit $\frac{m-x}{y-m} = \frac{x}{m}$)

Harmonisches Mittel: $(y - H(x,y)) : y = (H(x,y) - x) : x$ (vgl. mit $\frac{m-x}{y-m} = \frac{x}{y}$)

Diese sind zwar von anderer Gestalt als die (rechts daneben stehenden) pythagoreischen, die wir in Abschnitt 3 kennen gelernt haben und die erst später entwickelt wurden – beide Formulierungen sind aber äquivalent, [37] und die von Archytas erwähnten erlauben schöne Deutungen und Visualisierungen: Das arithmetische Mittel wird hier *differenzgleich* zwischen zwei gegebene gleichartige Größen (z. B. Längen) eingeschoben (Abb. 10), das geometrische hingegen (aus unserer Sicht!) *quotientgleich*. „Arithmetisch“ ist das erstgenannte Mittel deshalb, weil man gleichartige Größen (wie z. B.) Längen addieren und (ggf.) subtrahieren kann (wobei die „Lösung“ in Abb. 10 auch geometrisch über die Konstruktion des „Mittelpunkts“ erfolgen kann). Multiplikation und Division von Größen kannte man zwar noch nicht, aber als Ersatz diente die Gleichheit von Verhältnissen, wie sie beim Strahlensatz auftritt.

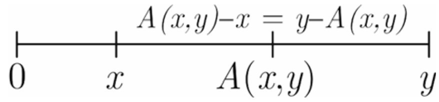

Abb. 10: arithmetisches Mittel in antiker Proportion

Und so entsteht das in Abb. 11 angedeutete Problem, bei zwei zentrumsgleichen Strahlen mit den Abschnitten x und y einen Kreis als „mittlere Proportionale“ so einzuschieben, dass $y : r = r : x$ gilt. Das können wir z. B. aufgrund der Darstellung nach Pappus über den Kathetensatz lösen (vgl. Abb. 4). Und da *wir* heute auch $x + y = A(x,y) + A(x,y)$ und $x \cdot y = G(x,y) \cdot G(x,y)$ schreiben können, bedeutet die Bildung des arithmetischen Mittels, die *Summe* von zwei Zahlen durch die Summe zweier gleicher Zahlen zu ersetzen, die Bildung des geometrischen Mittels hingegen, das *Produkt* von zwei Zahlen durch das Produkt zweier gleicher Zahlen zu ersetzen, wobei letzteres *geometrisch* auch so gedeutet werden kann, ein Rechteck durch ein flächeninhaltsgleiches Quadrat zu ersetzen.

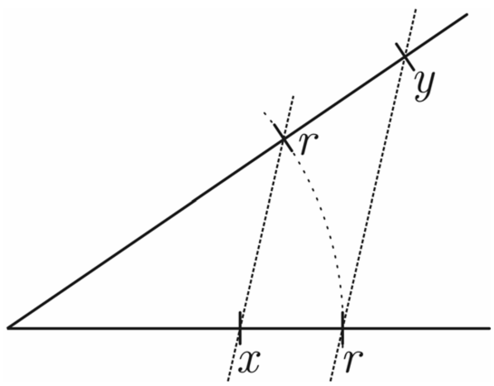

Abb. 11: geometrisches Mittel mittels Strahlensatz – wie erhält man r?

---

35 Vgl. [2002 c, 21].

36 Modifiziert in Anlehnung an [2002 c, 7].

37 Vgl. die Untersuchungen in [2002 c, 23 ff.], worauf wir hier nicht eingehen können.

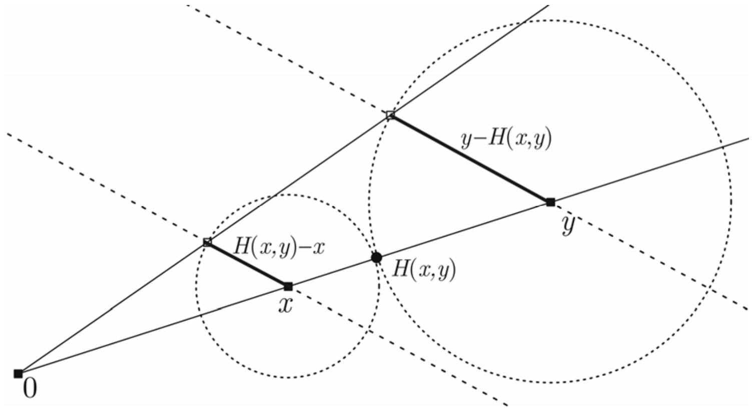

Abb. 12: harmonisches Mittel und harmonische Teilung

Die komplizierter erscheinende Proportion für das harmonische Mittel können wir uns an Abb. 12 veranschaulichen: Der mit $H(x,y)$ bezeichnete Punkt ist so zu wählen, dass die durch die Kreise erzeugten (dick gezeichneten) Strecken parallel sind und damit der Strahlensatz diese Proportion liefert. Die Strecke mit den durch x und y bezeichneten Endpunkten (sie hat die Länge $y-x$) wird dann übrigens *harmonisch geteilt*! Das ist aber nicht der historisch ursprüngliche Zugang zum harmonischen Mittel. Diesen müssen wir wohl vielmehr in der „musikalischen Proportion“ sehen, die schon die Babylonier kannten, und die *wir* wegen $G(x,y)=\sqrt{xy}$ aus $G(H(x,y),A(x,y))=G(x,y)$ wie folgt erhalten:

$$A(x,y):G(x,y)=G(x,y):H(x,y)$$

Das *harmonische Mittel* ist hiermit also so zu bestimmen, dass das *geometrische Mittel* die mittlere Proportionale zwischen dem *arithmetischen Mittel* und diesem neuen, dritten Mittel ist. Möglicherweise rührt hierher auch die ursprüngliche Bezeichnung „entgegengesetztes“ Mittel („subkonträres Mittel“, s. o.), bevor man später die Bezeichnung „harmonisches Mittel“ verwendete. Und wie hat sich diese neue Bezeichnung ergeben? Dies ist historisch nicht eindeutig gesichert, weil es zwei plausible Erklärungen gibt: [38]

1. **Harmonisches Mittel und Würfel**: Der Würfel hat 12 Kanten, 8 Ecken und 6 Flächen. Der Würfel galt nach Philolaos als *geometrische Harmonie*, und es gilt $H(6,12)=8$.
2. **Harmoniexperimente der Pythagoreer und die musikalische Proportion**: Man stelle nebeneinander vier *auf den gleichen Grundton gestimmte Monochorde* M_1, M_2, M_3 und M_4 *mit jeweils derselben Saitenlänge* x auf. Greift man nun bei M_1 die Länge $y := x/2$ ab, bei M_2 die Länge $A(x,y)$ und bei M_3 die Länge $H(x,y)$, und schlägt man die vier Saitenabgriffe (M_4 bleibt in voller Länge!) in der Reihenfolge $M_1 - M_2 - M_3 - M_4$ an (als *Arpeggio*), so erklingt eine „Kadenz“ – die Tonfolgen $M_1 - M_2$ und $M_3 - M_4$ bilden dasselbe Intervall, nämlich eine *Quinte* – eine sehr *harmonische Tonfolge*!

Zu den „nahen Verwandten“ der drei klassischen Mittelwerte gehört zunächst das ebenfalls schon in der Antike bekannte **kontraharmonische Mittel**, das wir in Abschnitt 3 untersucht haben und das als Streckenzug in der Darstellung nach Pappus (Abb. 5) erkennbar ist.

38 Vgl. [2002 c, 19 und 9].

Wir können aber auch das durch

$$Q(x,y) := \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

definierte sog. **quadratische Mittel** dazu rechnen, ein Spezialfall der *Varianz*, das aber *kein pythagoreischer Mittelwert* ist, weil es nicht als Lösung einer der elf Proportionen auftritt. Wir verschaffen uns zunächst einen Eindruck von Q als einstellige Funktion $x \mapsto Q(x,1)$ und erhalten Abb. 13 als Erweiterung von Abb. 4 (rechts), was in Erweiterung von (1) zu der Vermutung

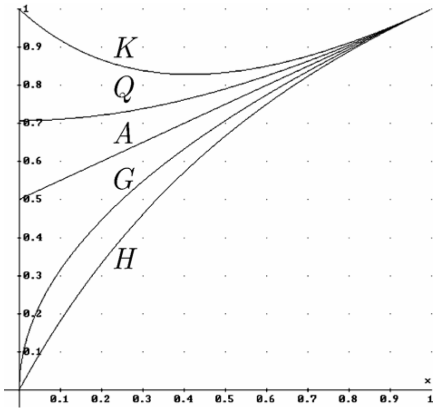

Abb. 13: quadratisches Mittel Q

$$x \le y \;\Rightarrow\; x \le H(x,y) \le G(x,y) \le A(x,y) \le Q(x,y) \le K(x,y) \le y \qquad (3)$$

führt.[39] Zunächst assoziieren wir mit dem Term $x^2 + y^2$ den Satz des Pythagoras, $\frac{x^2+y^2}{2}$ ist dann der halbe Flächeninhalt beider Quadrate zusammen, und also ist $Q(x,y)$ die Kantenlänge eines zu $\frac{x^2+y^2}{2}$ flächeninhaltsgleichen Quadrats (Abb. 14), womit *diese Namensgebung* motiviert werden *kann*.[40] Der formale Beweis von (3) verläuft wie der von (1), denn es gilt $A(x,y) \le Q(x,y) \Leftrightarrow (y-x)^2 \ge 0$ und $Q(x,y) \le K(x,y) \Leftrightarrow (y-x)^2 \ge 0$.

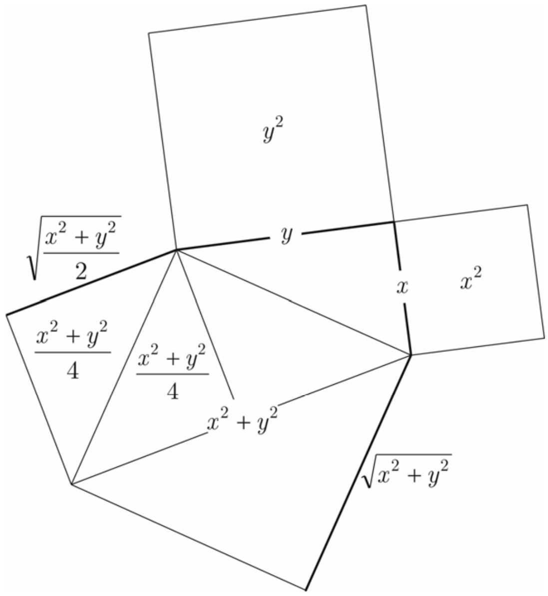

Abb. 14: Zur Konstruktion des quadratischen Mittels

Und schließlich betrachten wir noch das durch

$$W(x,y) := \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}\right)^2$$

definierte **Wurzelmittel**.[41]

Wegen $W(x,y) = (A(\sqrt{x}, \sqrt{y}))^2$ ist diese Namensgebung nachvollziehbar, und schnell lässt sich dieses Mittel in Abb. 13 ergänzen, was zu der Vermutung

$$x \le y \;\Rightarrow\; x \le H(x,y) \le G(x,y) \le W(x,y) \le A(x,y) \le Q(x,y) \le K(x,y) \le y \qquad (4)$$

führt. Der formale Beweis ist wieder trivial. Wegen $W(x,y) = A(G(x,y), A(x,y)) =: w$ lässt sich dieses Wurzelmittel w leicht in die Darstellung nach Pappus integrieren (Abb. 15), und auch für das quadratische Mittel q klappt es, wie wir aus

$$q^2 = a^2 + (a-x)^2 = \ldots$$

ersehen.

---

39 Vgl. [2002 c, 30].

40 In der Literatur treten für dieses Mittel auch andere Namen auf!

41 Vgl. [Herget 1985, 50] und [Lambert & Herget 2004, 57 f].

Abb. 15 visualisiert insgesamt sogar die Ungleichungskette (4), wobei $q \le k$ nicht einfach zu sehen ist. Es genüge uns aber hier der bereits erwähnte rechnerische Nachweis von

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)} \le \frac{x^2 + y^2}{x + y}.$$

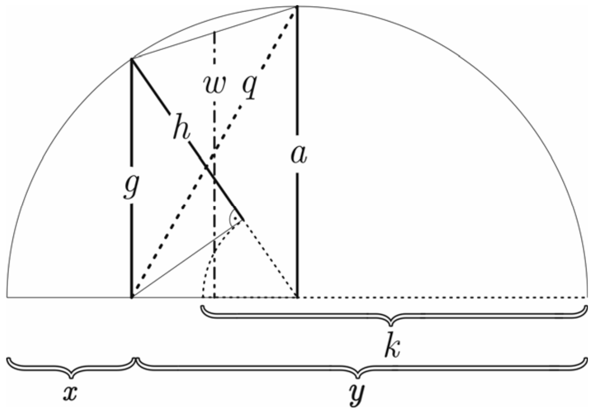

Abb. 15: Mittelwertdarstellung in Erweiterung der Darstellung nach Pappus

6.3 Darstellung zweistelliger Mittelwertfunktionen im Trapez

Abb. 16 zeigt eine ganz andersartige, auf [Bullen 2003, 66, 169] zurückgehende *Darstellung der drei klassischen Mittelwerte und des quadratischen Mittels*, und zwar durch sog. „Mittelparallelen“ in einem Trapez mit den Grundseiten der Längen y und x.[42] Offensichtlich können wir in diese Darstellung nicht nur auch noch das *kontraharmonische Mittel* und das *Wurzelmittel* integrieren, sondern es gilt darüber hinaus aufgrund unserer axiomatischen Untersuchungen in Abschnitt 5, wobei nur die Axiome (**M1**) und (**M2**) benutzt werden:

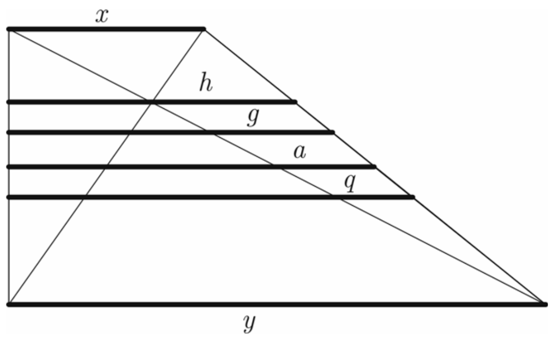

Abb. 16: Darstellung von Mittelwerten durch Mittelparallelen

- *Jede zweistellige Mittelwertfunktion ist mit Hilfe von Trapezen gemäß Abb. 16 durch eine Mittelparallele eindeutig darstellbar!*

Wie ist das zu verstehen? Es sei eine Mittelwertfunktion M gegeben. Dann gibt es zu jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ ein Trapez wie in Abb. 16, das bis auf die (z. B. zu 1 normierbare) Höhe eindeutig ist. Der Mittelwert $M(x,y)$ wird dann wegen $x \le M(x,y) \le y$ durch eine eindeutige Mittelparallele dargestellt. *Die Umkehrung gilt allerdings nicht*, weil eine konkrete Mittelparallele (also der Funktionswert $M(x,y)$) durch unterschiedliche Mittelwertfunktionen entstanden sein kann, wie wir bereits an Abb. 4 (links) sehen. – Aber wo genau liegen nun die in Abb. 16 eingezeichneten Mittelparallelen, und warum läuft anscheinend h durch den Diagonalenschnittpunkt?

Wir lösen dies durch mehrfache Anwendung des Strahlensatzes, indem wir in Abb. 17 drei verschiedene Strahlenzentren betrachten.

Zunächst zeigen wir $s_1 = s_2$.

Es gilt dann:

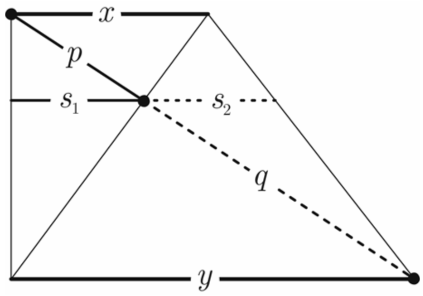

Abb. 17: Mittelparallele durch den Diagonalenschnittpunkt liefert harmonisches Mittel

42 Aus [Lambert & Herget 2004, 59].

(i)	(ii)	(iii)
$\dfrac{x}{y} = \dfrac{p}{q}$	$\dfrac{y}{s_1} = \dfrac{p+q}{p}$	$\dfrac{x}{s_2} = \dfrac{p+q}{q}$
Strahlenzentrum in der Mitte	*Strahlenzentrum links oben*	*Strahlenzentrum rechts unten*

Aus (ii) und (iii) folgt $\dfrac{y}{s_1} \cdot \dfrac{s_2}{x} = \dfrac{q}{p} \underset{\text{(i)}}{=} \dfrac{y}{x}$, also ist $s_1 = s_2 =: s$.

Damit folgt z. B. aus (ii) mit (i): $\dfrac{s}{y} = \dfrac{1}{1+\frac{q}{p}} = \dfrac{1}{1+\frac{y}{x}}$, also $s = \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{1}{2}H(x,y)$.

◆

Die anderen Mittelparallelen in Abb. 16 sind dort nur qualitativ bezüglich ihrer Reihenfolge angegeben. Wir erhalten (salopp formuliert) schnell folgende **weitere Erkenntnisse**:

1. Wegen $y - a = a - x$ ist a eine Seitenhalbierende.
2. Wegen $y : g = g : x$ teilt g das Trapez in zwei ähnliche Teiltrapeze.

Und außerdem gilt:

3. q teilt das Trapez in zwei flächeninhaltsgleiche Teiltrapeze.

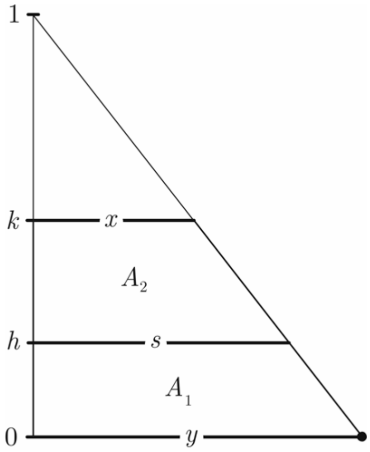

Abb. 18: Aufteilung durch das Quadratmittel – zum Beweis

Das sieht man möglicherweise nicht direkt, aber es lässt sich mit Hilfe von Abb. 18 elementargeometrisch mit dem Strahlensatz nachrechnen:

So ist $k = 1 - \frac{x}{y}$ und $s = y - yh$. Mit $2A_1 = (s+y)\cdot h$, $2A_2 = (s+x)(k-h)$ und der Bedingung $A_1 = A_2$ errechnet sich schließlich $s = Q(x,y)$.

◆

Wir kommen nun zu einer experimentierenden Variation der Darstellung nach Bullen in Abb. 16, denn wir haben gesehen, dass sich jede zweistellige Mittelwertfunktion so darstellen lässt. Insbesondere ergibt sich die Mittelparallele zum harmonischen Mittel als Parallele zur Grundseite durch den Schnittpunkt der Diagonalen. Welchen Mittelwert würden wir denn erhalten, wenn wir dieses „Diagonalenkreuz“ ein wenig drehten, wobei sich dann der Schnittpunkt verlagern würde?

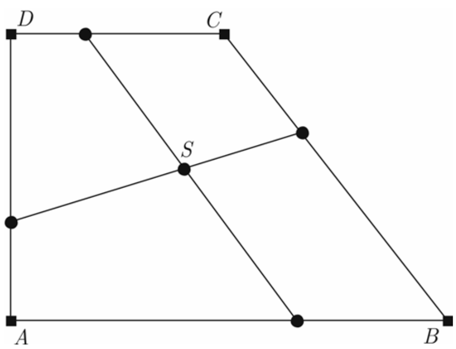

Abb. 19: Variation des Transversalenschnittkreuzes

Diese Frage präzisieren wir, indem wir jede der vier Trapezseiten der Reihe nach umlaufend im selben Verhältnis $\lambda : (1-\lambda)$ teilen und dann λ zwischen 0 und 1 variieren (Abb. 19)! Dazu bietet sich ein sog. „Dynamisches Geometriesystem“ (DGS) mit

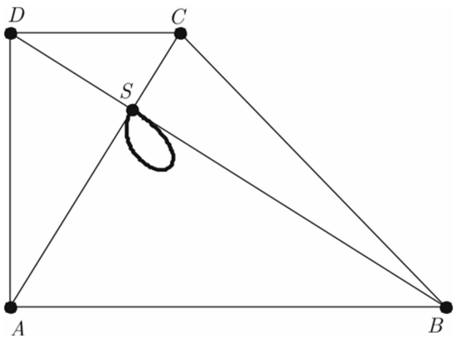

Abb. 20: Ortslinie des Punktes S aus Abb. 19 als „Tropfen“

Schiebereglern an, mit dem wir eine *Bewegliche Geometrie* realisieren können. Wir entdecken schnell, dass der Schnittpunkt S nach oben und unten begrenzt variiert. Aber wie? Dazu lassen wir die *Ortslinie* von S zeichnen und variieren S erneut. Abb. 20 zeigt uns als Ergebnis einen „Tropfen“.[43] Wie ist das zu verstehen? Immerhin entdecken wir empirisch-heuristisch, dass S zwischen dem harmonischen Mittel und dem arithmetischen Mittel variiert. Stimmt das? Warum ist das so? … ? – *Hier eröffnet sich spielerisch ein spannendes und hochinteressantes Forschungsfeld, und zwar schon im Mathematikunterricht!*

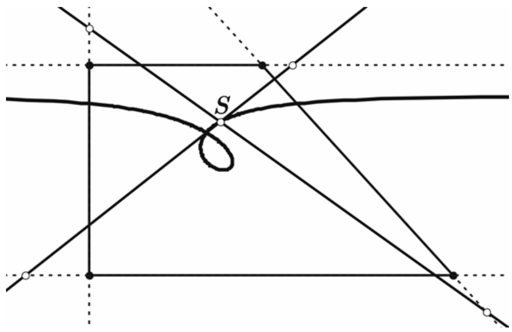

Abb. 21: Ortslinie des Transversalenschnittpunkts S bei Zulassung auch äußerer Teilpunkte

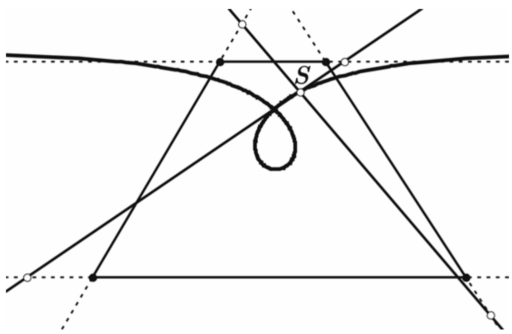

Abb. 22: Variation von Abb. 21 – symmetrisches Trapez als Ausgangsfigur

Wir experimentieren weiter, indem wir nun auch „äußere“ Teilpunkte zur Erzeugung des „Transversalenkreuzes“ zulassen, wodurch der Variationsbereich drastisch zunimmt. Doch welche Überraschung: Der „Tropfen“ erweist sich nun als *Schleife* einer endlos zu denkenden Kurve (Abb. 21). Sollte diese Kurve etwa ein Teil einer (verzerrten) *Konchoide* (Muschellinie) sein? Wählen wir nun das Ausgangstrapez gar symmetrisch, so ist auch diese Ortskurve (spiegel-) symmetrisch und ähnelt einer Konchoide noch mehr (Abb. 22). Es könnte aber auch eine *Strophoide* sein, aber die ist anders definiert, und insbesondere hat die Strophoide im Gegensatz zur Muschellinie keinen zweiten Ast. Oder sollte es eine ganz andere, vielleicht sogar bisher noch unbekannte Kurve sein? Doch bei aller Faszination dürfen wir nicht unseren Ausgangspunkt vergessen: dass nämlich die „Schleife“ dieser Kurve durch *Untersuchung zweistelliger Mittelwertfunktionen* als eine *Ortslinie* entstanden ist, die *„zwischen harmonischem und arithmetischem Mittel“* liegt!

6.4 Von Mittelwertfunktionen zu Strophoiden – und umgekehrt

Was spricht nun für die Konchoide und was dagegen – was für die Strophoide und was dagegen? Hier setzt nun ein spannendes Suchen mit ungewissem Ausgang ein!

---

43 Diese Darstellungen und die im folgenden Abschnitt sind durch gemeinsames, eher spielerisches Experimentieren mit Anselm Lambert unter Verwendung von EUKLID DYNAGEO entstanden, wobei der Schritt von Abb. 20 zu Abb. 21 durch CAS-Analyse mit Maple gelang. Wir waren beide überrascht, in welche unvermutete Richtung diese Spielerei führte!

Ohne die Möglichkeit des Vorliegens einer Konchoide zu verwerfen, ist die *Strophoide* im vorliegenden Zusammenhang schon deshalb *untersuchenswert*, weil nämlich *sie selber* durch eine *Mittelpunktseigenschaft* definiert ist. Abb. 23 demonstriert dies mit Euklid DynaGeo, und zwar unter Berücksichtigung folgender

> **Konstruktionsbeschreibung**: Gegeben sei ein (Ursprungs-)Punkt Z (er möge „*Leitpunkt*“ genannt sein) und eine *Leitgerade* g, die nicht durch Z geht. Hinzu nehmen wir die *Lotgerade* h von Z durch g mit dem *Lotfußpunkt* O. Dann betrachten wir alle von Z ausgehenden Strahlen, die g schneiden (der Schnittpunkt sei mit M bezeichnet), und zu jedem dieser Strahlen betrachten wir die beiderseits von M auf ihm liegenden Punkte P und Q, für die $|MP| = |MQ| = |MO|$ gilt. Die entstehende *Ortskurve*, auf der also sowohl P als auch Q liegen, heißt **Strophoide**. [44]

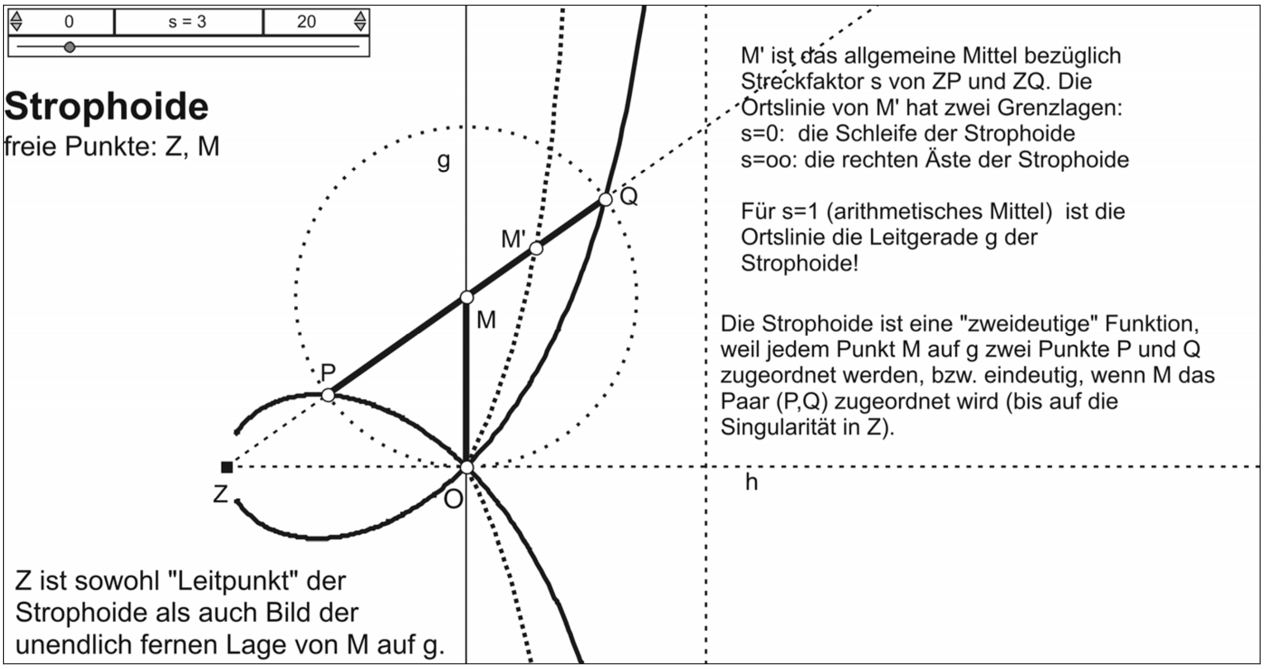

Abb. 23: Zur Entdeckung des Zusammenhangs zwischen Mittelwertfunktionen und der Strophoide

Abb. 23 betrachten wir nun zunächst *ohne* die gestrichelte durch M' verlaufende Kurve, *ohne* den Schieberegler links oben und *ohne* die beiden Textabsätze rechts oben: Man erkennt dann eine Umsetzung der Konstruktionsbeschreibung, und es ist die *Mittelpunktseigenschaft* von M zu erkennen, woraus sich das Punktepaar (P,Q) und damit die Ortskurve ergibt. Somit liegt die Abbildung $M \mapsto (P,Q)$ vor.

---

44 Gemäß [Encyclopedia 2003, 2881] wurde dieser Name 1846 von Montucci eingeführt und bedeutet etwa „verdrehte Binde“. Er hat den griechischen Wortstamm „stroph-“ für „drehen“, „wenden“ (z. B. in „strophos“ für „Band“, „Seil“ und in „strophion“ für „kleines Band“, insbes. für die „Kopfbinde“ als Priesterschmuck). Als *Fußpunktkurve einer Parabel* ist sie eine *„gerade Strophoide“*, die auch unter dem Namen *„Logozyklika“* bekannt ist. Analytisch wird sie üblicherweise als algebraische Kurve 3. Ordnung durch die Gleichung $y^2(a-x) = x^2(a+x)$ (mit einer Formvariablen a) oder auch in Polarkoordinaten durch $\rho \cdot \cos(\varphi) = -a \cdot \cos(2\varphi)$ beschrieben. In der Form $y^2(a-x) = x^2(a+x)$ ist sie mit einem 3D-Plotter auch als Fläche darstellbar. Zur Strophoide finden sich z. B. bei [Schupp & Dabrock 1995] weitergehende Hinweise.

Nun „greift“ eine mathematisch-forschende Haltung, nämlich diejenige, zu versuchen, entdeckte mathematische Zusammenhänge auch „invers fruchtbar“ zu machen, hier konkret:

- *Von der Darstellung von Mittelwerten sind wir zu „Strophoiden“ gelangt; können umgekehrt Strophoiden etwas zur Darstellung von Mittelwerten beitragen?*

Wenn also M in Abb. 23 als Mittelpunkt der zu konstruierenden Strecke $\overline{PQ}$ erscheint, dann ist doch $|ZM|$ das arithmetische Mittel von $|ZP| =: x$ und $|ZQ| =: y$. Und dann müsste es eigentlich möglich sein, auch einen weiteren auf der Strecke $\overline{ZM}$ liegenden Punkt M' so zu wählen, dass $|ZM'|$ ein beliebiges anderes Mittel von x (also $|ZP|$) und y (also $|ZQ|$) ist! Der Schieberegler für den „Streckfaktor“ s realisiert dies und führt exemplarisch zu einer weiteren „dynamischen“ Ortskurve, die in Abb. 23 gestrichelt dargestellt ist! Und was haben wir damit erreicht bzw. entdeckt? Wir wissen zwar noch immer nicht, ob die Ortskurve in Abb. 21 eine Konchoide oder eine Strophoide oder gar eine ganz andere Kurve ist, doch statt dessen haben wir etwas Weiteres über die Darstellungsmöglichkeiten von zweistelligen Mittelwertfunktionen hinzu gelernt:

Offensichtlich ist nun jede gemäß dieser Konstruktion durch einen Punkt M' verlaufende Ortslinie in Abb. 23 die Darstellung genau einer zweistelligen Mittelwertfunktion, und beim Experimentieren mit dem Schieberegler wird nahe gelegt, dass die beiden links- bzw. rechtsseitig der Leitgeraden g liegenden Äste der Strophoide *„Grenzlagen für alle Mittelwertfunktionen“* sind (es ist dann nämlich entweder $M' = P$ oder $M' = Q$), genauer:

Bezeichnen wir vorübergehend die Mittelwertfunktionen mit μ statt mit M (denn M ist zurzeit vergeben; wenn wir es neu aufrollen würden, würden wir uns die Bezeichnungen neu überlegen, aber so etwas weiß man meist vorher noch nicht), so gilt dann gemäß den axiomatischen Betrachtungen in Abschnitt 5

$$\mu(x, y) = \frac{x + y \cdot S(x, y)}{1 + S(x, y)}$$

mit $S(x, y) = s$ (s ist der mit dem Schieberegler einstellbare Streckfaktor). Die Grenzfälle in Abb. 23 für $s = 0$ bzw. $s = \infty$ liefern „entartete“ Mittelwertfunktionen μ_0 bzw. μ_∞ (wir erkennen sie auch als „Grenzgeraden“ in Abb. 8.), für die also

$$\mu_0(x, y) = x \quad \text{bzw.} \quad \mu_\infty(x, y) = y$$

gilt. $s = 0$ liefert P, und $s = \infty$ liefert Q.

Das könnte nun zu der Vermutung führen, dass wir mittels Abb. 23 alle zweistelligen Mittelwertfunktionen darstellen können. Kann das stimmen? Zunächst ist $s = |ZM'|$. Da s aufgrund der Schieberegler-Konstruktion für alle Punkte einer gestrichelten Ortslinie *konstant* ist, gilt dies wegen $S(x, y) = s$ auch für $S(x, y)$. Das heißt aber: Wir können mittels Abb. 23 nur solche Mittelwertfunktionen mit konstantem, nicht von x und y abhängigem Streckfaktor $S(x, y)$ darstellen! (Wir beachten, dass wir wie bei den Darstellungen in Abb. 4 nicht stets alle x, y erfassen können).

Doch gibt es denn überhaupt solche Mittelwertfunktionen mit von x und y *abhängigem* Streckfaktor $S(x,y)$? Natürlich, denn $S(x,y)$ kann gemäß Satz 1 in Abschnitt 5 *beliebig* gewählt werden, und als Beispiele hierfür haben wir ja bereits das harmonische bzw. das geometrische Mittel mit $S(x,y)=\frac{x}{y}$ bzw. $S(x,y)=\sqrt{\frac{x}{y}}$ kennen gelernt. Aber was haben wir denn dann damit erreicht? Welche Mittelwertfunktionen sind denn wie in Abb. 23 mit Hilfe der Strophoide darstellbar? Es sind nur solche gemäß

$$\mu(x,y)=\frac{x+sy}{1+s}=\tfrac{1}{1+s}\,x+\tfrac{s}{1+s}\,y=\lambda x+(1-\lambda)y \quad \text{mit konstantem} \quad \lambda\in[0;1],$$

und das sind (leider) nur die bekannten sog. *gewichteten arithmetischen Mittel*!

Immerhin: Aus der überabzählbaren Menge der zweistelligen Mittelwertfunktionen können wir zwar über Abb. 23 (zunächst?) nur die echte Teilmenge derjenigen für gewichtete arithmetische Mittel darstellen, aber auch dies sind bereits (theoretisch!) überabzählbar viele! – Ist das alles? Nein, denn es fällt uns nicht schwer, uns in Abb. 23 den Streckfaktor s auch als von x und y abhängig ***vorzustellen***! Klar, dass das dann nicht mehr mit *diesem* Schieberegler geht, aber es *muss und wird gehen*, wir müssen auch das ***darstellen*** können! Und so kommen wir exemplarisch zu den Abbildungen 24 bis 29 auf der nächsten Seite, die ebenfalls wieder mit EUKLID DYNAGEO erzeugt wurden. Weil sie durch *Variation der Strophoidenkonstruktion* entstanden sind, nennen wir sie „**strophoidale Darstellungen**“.

Sollten etwa in Abb. 24 und 25 Kreise entstanden sein? Ohne diese Frage auf Anhieb entscheiden zu wollen, wird die sogleich entstehende Vermutung, dass allgemein sogar für $S(x,y)=(\frac{x}{y})^b$ Kreise entstehen könnten, experimentell und „augenscheinlich“ schnell widerlegt. Aber das arithmetische Mittel (mit g als strophoidaler Darstellung!) scheint eine *Trennung* zwischen den so erzeugten Mittelwertfunktionen mit $b<0$ und $b>0$ zu bewirken, wie man aus Abb. 26 vermuten kann. Abb. 27 zeigt passend zu Abb. 13 die Darstellung des quadratischen Mittels, und Abb. 28 und 29 zeigen exemplarisch Darstellungen erfundener Mittelwertfunktionen über $S(x,y)=(xy)^b$, wobei das Vorzeichen des Exponenten wieder wichtig zu sein scheint. Hier gibt es vieles zu entdecken und zu untersuchen, und offensichtlich lassen sich über diesen Konstruktionsprozess *Mittelwertfamilien* [45] bilden.

Es sind viele Fragen entstanden, und es sind noch viele unbeantwortet geblieben – aber **wir wissen nun** in Verbindung mit der axiomatischen Untersuchung, **dass es zu jeder zweistelligen Mittelwertfunktion eine *„strophoidale Darstellung“* gibt**, die wir auch (beispielsweise!) mit Hilfe eines Programms zur Beweglichen Geometrie (sog. „Dynamisches Geometriesystem“, kurz: DGS, wie etwa EUKLID DYNAGEO) visualisieren können, wenn wir die zugehörige Streckfaktorfunktion kennen! Diese Streckfaktorfunktion können wir uns nun bei gegebener Termdarstellung einer Mittelwertfunktion leicht verschaffen, indem wir mit Bezug auf die Pythagoreer und Chuquet den Ansatz $M(x,y)=(x+yS(x,y))/(1+S(x,y))$ verwenden!

---

45 Vgl. hierzu auch [Lambert & Herget 2004].

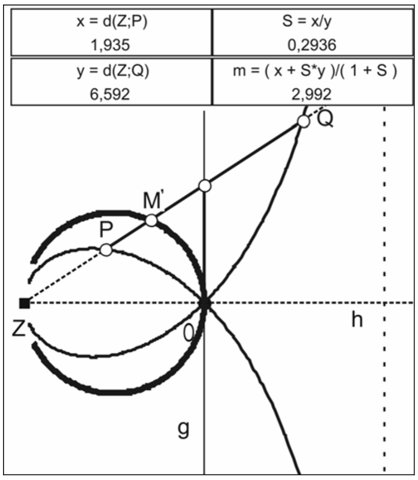

Abb. 24:
strophoidale Darstellung des harmonischen Mittels

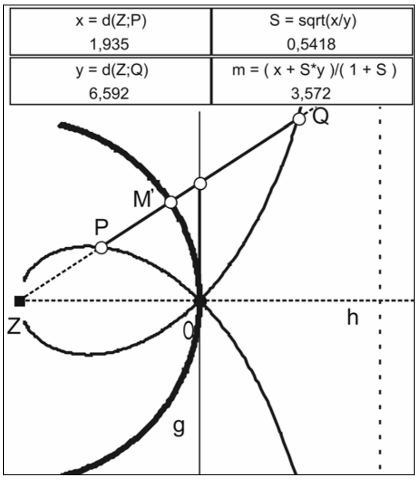

Abb. 25:
strophoidale Darstellung des geometrischen Mittels

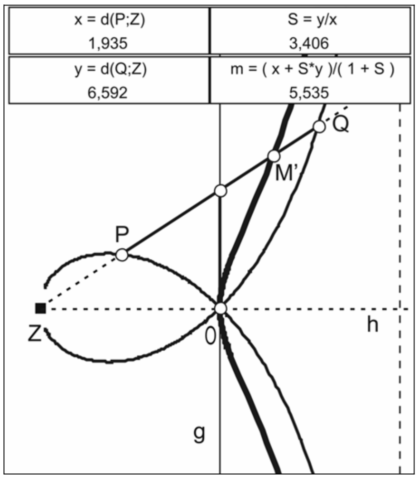

Abb. 26:
strophoidale Darstellung des kontraharmonischen Mittels

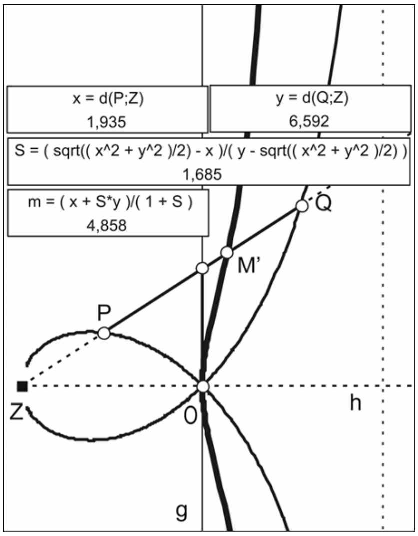

Abb. 27:
strophoidale Darstellung des quadratischen Mittels

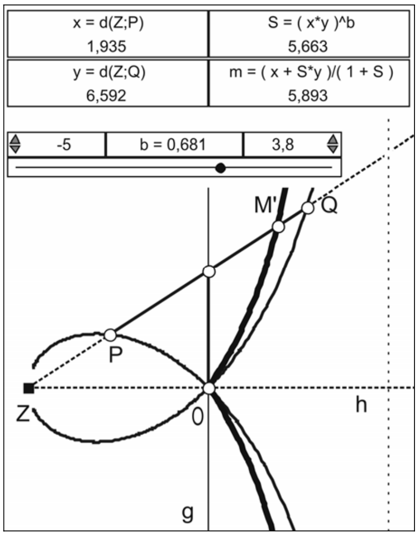

Abb. 28:
strophoidale Darstellung eines erfundenen Mittels

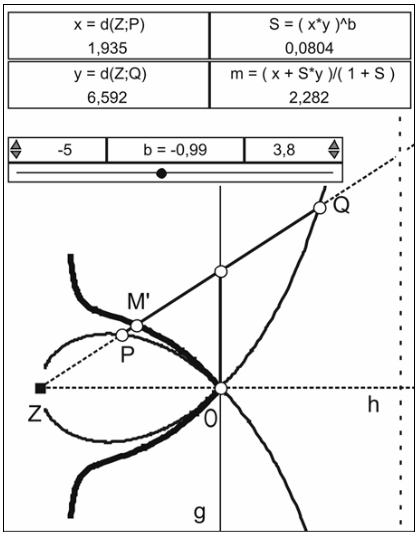

Abb. 29:
strophoidale Darstellung eines weiteren erfundenen Mittels

6.5 Kreise als strophoidale Darstellungen? – Heuristiken und Beweise

Zwei noch offene Fragen seien kurz diskutiert: Abbildungen 24 und 25 führten zu der spontanen *Vermutung*, dass die *strophoidalen Darstellungen sowohl des harmonischen als auch des geometrischen Mittels jeweils Kreise* sind. Finden wir eine elementare Möglichkeit, diese Vermutung zu verifizieren bzw. zu falsifizieren? Zunächst bieten sich DGS wie EUKLID DYNAGEO als Werkzeuge zur Beweglichen Geometrie an: In Abb. 24 scheint ein Kreis um den Mittelpunkt der Strecke $\overline{ZO}$ durch die Punkte Z und O vorzuliegen. Durchführung dieser Konstruktion mit einem DGS „bestätigt“ diese Vermutung! In Abb. 25 scheint ein Halbkreis um O durch Z vorzuliegen. Auch hier „bestätigt“ das DGS diese Vermutung! – EUKLID DYNAGEO erweist sich hier also als ein **sehr mächtiges heuristisches Werkzeug**!

Zugleich tritt hier allerdings – verschärft durch diese neuen Werkzeuge! – im Unterricht das Problem des „Weckens von Beweisbedürftigkeit“ [46] auf, dem wir uns in diesem Rahmen leider nicht weiter zuwenden können.

Bei [Schupp & Dabrock 1995, 28] finden wir die Feststellung, dass *Strophoiden* die Eigenschaft haben (bezogen auf Abb. 25), *bei Inversion am Kreis* mit dem Mittelpunkt Z durch O auf sich selber abgebildet zu werden, dass sie also *Fixkurven* sind. (Solche Fixkurven heißen *„anallagmatisch“*.) Das führt zum ersten Beweis:

Denn da nun in Abb. 25 $|ZM'|$ das **geometrische Mittel** von $|ZP|$ und $|ZQ|$ ist, gilt $|ZP| \cdot |ZQ| = |ZM'|^2$, und genau das bedeutet (in Umkehrung des Satzes von der Inversion am Kreis), dass P das Bild von Q (bzw. umgekehrt!) bezüglich der Inversion am Kreis um Z durch O ist, was zu beweisen war! ♦

Für das **harmonische Mittel** legen wir in Abb. 24 ein kartesisches u-v-System so, dass die u-Achse auf der Halbgeraden h liegt und die v-Achse mit der Geraden g zusammen fällt, O also der Ursprung dieses Koordinatensystems ist. Mit $m := |OM|$ liegen dann per Strophoidenkonstruktion P und Q auf dem durch $u^2 + (v-m)^2 = m^2$ gegebenen Kreis, und mit $a := |ZO|$ beschreibt $v = \frac{m}{a} u + m$ die durch Z und O verlaufende Gerade. Damit können wir die Koordinaten der Schnittpunkte (P und Q) in Abhängigkeit von a und m berechnen, und wenn wir wieder $x := |ZP|$ und $y := |ZQ|$ verwenden, erhalten wir $x = \sqrt{a^2 + m^2} - m$ und $y = \sqrt{a^2 + m^2} + m$, also $H(x,y) = 2xy/(x+y) = a^2/\sqrt{a^2+m^2}$. Bezeichnen wir nun die Koordinaten von M' im u-v-System mit s und t, also $M' = (s, t)$, dann gilt mit dem Strahlensatz $a:s = m:t$ und $a:s = \frac{1}{2}(x+y):H(x,y)$. Diese beiden Gleichungen liefern uns zunächst

$$s = \frac{a^3}{a^2 + m^2} \quad \text{und} \quad t = \frac{a^2 m}{a^2 + m^2}$$

und damit schließlich $\left(s - \frac{a}{2}\right)^2 + t^2 = \frac{a^2}{4}$, was zu beweisen war! ♦

7 Literatur

Bullen, Peter S. [2003]: Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Burton, Leone [1999]: Mathematics and their epistemologies – and the learning of mathematics. In: Schwank, Inge (Hrsg.): European Research in Mathematics Education I – Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, 1999, Vol. 1, 90–105.

Cantor, Moritz [1892]: Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Leibzig: Teubner. 1. Auflage.

– [1898]: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band, 1668 – 1699. Leipzig: B. G. Teubner.

[46] Vgl. [Hischer 2002 b, 10 f.].

Encyclopedia [2003]: Second Edition of CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. Boca Rato / London / New York: Chapman & Hall.

Fischer, Roland & Malle, Günter [1985]: Mensch und Mathematik – Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. Mannheim / Wien / Zürich: BI Wissenschaftsverlag.

Herget, Wilfried [1985]: Zoo der Mittelwerte. In: *mathematik lehren*, 1985, Heft 8, 50 – 51.

Hischer, Horst [1998]: „Fundamentale Ideen" und „Historische Verankerung" – dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung. In: *mathematica didactica* **21**(1998)1, 3 – 21.

– [2002 a]: Zur Geschichte des Funktionsbegriffs. Als Preprint Nr. 54 der Preprint-Reihe der Fachrichtung Mathematik der Universität des Saarlandes herunterladbar unter: http://www.math.uni-sb.de/PREPRINTS/preprint_liste.html

– [2002 b]: Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. Mit Beiträgen von Anselm Lambert, Thomas Sandmann u. Walther Ch. Zimmerli. Hildesheim: Franzbecker (2. Auflage 2003).

– [2002 c]: Viertausend Jahre Mittelwertbildung – Eine fundamentale Idee der Mathematik und didaktische Implikationen. In: *mathematica didactica* **25**(2002)2, 3–51.

– [2003]: Mittelwertbildung – eine der ältesten mathematischen Ideen. In: Klika, Manfred (Hrsg.): Zentrale Ideen. Themenheft *mathematik lehren*, Heft 119, August 2003, 40 – 46.

– [2004 a]: Mittenbildung als fundamentale Idee. In: *Der Mathematikunterricht* **50**(2004)5, 4–13.

– [2004 b]: Mittelwertfolgen – oder: Mitten inmitten von Mitten. In: *Der Mathematikunterricht* **50**(2004)5, 42–54.

Hischer, Horst & Lambert, Anselm [2003]: Was ist ein numerischer Mittelwert? – Zur axiomatischen Präzisierung einer fundamentalen Idee. In: *mathematica didactica* **26** (2003)1, 3–42.

– (Hrsg.) [2004 a]: Mittelwerte und weitere Mitten (Themenheft). *Der Mathematikunterricht* **50**(2004)5, 3–78.

– [2004 b]: Zur Axiomatisierung von Mittelwerten unter Berücksichtigung der historischen Begriffsentwicklungen. In: *Der Mathematikunterricht* **50**(2004)5, 67–78.

Krüger, Katja [2000]: Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips. Berlin: Logos Verlag.

Lambert, Anselm & Herget, Wilfried [2004]: Mächtig viel Mittelmaß in Mittelwert-Familien. In: *Der Mathematikunterricht* **50**(2004)5, 55–66.

Nelson, Roger B. [1993]: Proofs Without Words. Washington: The Math. Association of America.

Schupp, Hans & Dabrock, Heinz [1995]: Höhere Kurven. Mannheim / Leipzig / Wien / Zürich: BI Wissenschaftsverlag.

Vollrath, Hans-Joachim [1989]: Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **10**(1989), 3–37. http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/vollrath/papers/052.pdf

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Horst Hischer
E-Mail: contact.horst@hischer.de, Web: http://hischer.de/horst/
Universität des Saarlandes, Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik,
Postfach 15 11 50, 66041 Saarbrücken