Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint Nr. 115

Treppenfunktionen und Neue Medien — medienpädagogische Aspekte

Horst Hischer

Saarbrücken 2004

Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes

Preprint No. 115
submitted: October 30, 2004

Treppenfunktionen und Neue Medien — medienpädagogische Aspekte

Horst Hischer

Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Postfach 15 11 50
D–66041 Saarbrücken
Germany
hischer@math.uni-sb.de

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany

Fax: + 49 681 302 4443
e-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW: http://www.math.uni-sb.de/

Treppenfunktionen und Neue Medien — medienpädagogische Aspekte

Horst Hischer

Hans-Joachim Vollrath zum siebzigsten Geburtstag gewidmet

Bei der Fülle der Beispiele, die inzwischen zur Einführung des Funktionsbegriffs in der Sekundarstufe 1 herangezogen werden, spielen bisher Treppenfunktionen kaum eine Rolle ...

Hans-Joachim Vollrath, 1974

Treppenfunktionen lassen sich mit Hilfe Neuer Medien darstellen, und vice versa sind Neue Medien Darstellung bzw. gar Materialisierung von Treppenfunktionen, und zwar durch Digitalisierung bzw. Diskretisierung bei der Verarbeitung und Präsentation von (analogen) Daten. Dieses finden wir etwa bei der Verarbeitung und Darstellung von Graphik- und Audiodaten. Insofern bilden Treppenfunktionen einen geeigneten Unterrichtsgegenstand, mit dem auch medienpädagogische Ziele angesprochen werden können: nämlich sowohl mediendidaktische Ziele (hier: Kompetenzbildung für die Darstellung und Untersuchung von (nicht nur Treppen-)Funktionen mit Neuen Medien als leistungsfähigen Werkzeugen) als auch medienkundliche Ziele (hier: Verständnisbildung für die den Neuen Medien eigenen Diskretisierungsprozesse) und medienerzieherische Ziele (hier: Bildung der Fähigkeit zur Beurteilung der durch die Neuen Medien vermittelten Möglichkeiten der Weltaneignung).

1 Was sind Treppenfunktionen?

Die Antwort scheint klar zu sein, ist doch die Bezeichnung „Treppenfunktion“ intuitiv einleuchtend und damit anscheinend selbstredend. Ganz in diesem Sinne schreibt Vollrath hierzu in seiner didaktischen Analyse von 1974: [1]

> Die Bezeichnung „Treppenfunktion“ liegt so dicht bei dem anschaulich gegebenen Sachverhalt, daß die Schüler von sich aus nicht das Bedürfnis haben, den Begriff zu definieren. Das kann jedoch in die Wege geleitet werden [...]

In der Mathematik sind Definitionen unverzichtbar, und „Treppenfunktionen“ sind offenbar diejenigen einstelligen reellen (?) Funktionen, die „abschnittsweise konstant“ sind – oder? Weit gefehlt, denn über den hinter dieser Bezeichnung stehenden Begriff herrscht in der Mathematik keineswegs Einigkeit, wie schon der Blick in diverse Fachbücher lehrt! Vielmehr begegnen wir hier einem kontextabhängigen Begriffsverständnis, das sich je nach Interessen- und Problemlage der damit arbeitenden Fachleute herausbildet – so wie wir in der Mathematik und ihren Anwendungen auch heute kein einheitliches, rigoroses Verständnis dessen vorfinden, was unter einer „Funktion“ zu verstehen ist (vgl. [Hischer 2002, 319 ff.]).

[Vollrath 1974, 55 f.] zitiert folgende, dieses vielfältige Begriffsverständnis widerspiegelnde Definitionen:

(1) Reelle Funktion mit endlich vielen Funktionswerten [...]

(2) Reelle Funktion mit höchstens abzählbar vielen Funktionswerten [...]

(3) Auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definierte reelle Funktion, für die es x_i gibt mit $a = x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} = b$, so daß f konstant ist für jedes offene Intervall (x_i, x_{i+1}), $i = 1, ..., n$ [...]

(4) Auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definierte reelle Funktion mit höchstens endlich vielen Sprungstellen, die in durch Sprungstellen abgegrenzten Intervallen konstant ist [...]

(5) Reelle Funktion mit abzählbar vielen Sprungstellen, die in den durch Sprungstellen abgegrenzten Intervallen konstant ist und bei der die Sprungstellen keinen Häufungswert besitzen [...]

Dieser Katalog sei um folgende aktuelle (maßtheoretisch motivierte) Definition ergänzt, die für reelle Funktionen mit (1) übereinstimmt: [2]

Treppenfunktion, Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. [...]

Damit würde sich u. a. (fatalerweise!?) die Dirichletfunktion ($f(x) := 1$ für $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) := 0$ sonst) als eine Treppenfunktion erweisen, worauf auch [Vollrath 1974, 55] hinweist. Im Folgenden verwende ich statt dessen ein „schulnahes" und intuitiv nahe liegendes Begriffsverständnis (in zunächst vager, dafür aber anschaulicher Beschreibung):

„**Treppenfunktion als abschnittsweise konstante Funktion**".

Die Anzahl der Sprungstellen kann hier endlich oder abzählbar („höchstens abzählbar") sein. Sodann erweist sich auch die von [Vollrath 1973] diskutierte und wichtige *Ganzteilfunktion* („Gaußklammer") als eine Treppenfunktion, was sie jedoch weder gemäß dem letzten Zitat noch nach dem vorhergehenden in (3) bzw. (4) wäre!

Obige „Definition" soll nun nicht etwa ausschließen, dass (je nach Schuljahrgang) im Unterricht – ganz im Sinne von [Vollrath 1974, ...] – durch Betrachtung auch anderer Auffassungen *der Prozess der Begriffsgenese in der Mathematik bewusst gemacht* wird. Und durch diese vage „Definition" soll einer sowohl möglichen als auch nötigen Exaktifizierung keinesfalls ausgewichen werden – nur ist letztere weder Gegenstand noch Ziel dieser Arbeit, deren Fokus auf medienpädagogischen Aspekten des mit der Bezeichnung „Treppenfunktion" verbundenen Begriffs liegt.

2 Die Ganzteilfunktion und ihre nahen Verwandten

Programmiersprachen sind mit (produktspezifischen) „Standardfunktionen" ausgestattet, was den Anwendern die termdefinierte Konstruktion „eigener" Funktionenfamilien ermöglicht. Dies gilt auch für Funktionenplotter (sowohl für eigenständige als auch für die mit Computeralgebrasystemen integrierten), für Tabellenkalkulationssysteme und sogar für Programme zur Beweglichen Geometrie („Dynamische Geometriesysteme" wie beispielsweise Euklid DynaGeo). [3] Und so ist es nahe liegend, die dort verfügbaren und den Schüler(inne)n vom Namen her oft noch unbekannten mathematischen Funktionen *spielerisch untersuchen* zu lassen.

Auch die von [Vollrath 1973] analysierte *Ganzteilfunktion* tritt hier auf, und zwar unter unterschiedlichen Namen wie z. B. int, floor, Ganzzahl ... – in der Mathematik seit Gauß [4] mit der „Gaußklammer" $[\cdot]$ bezeichnet, heute präzisierend erweitert durch $\lfloor x \rfloor$ (für $\mathrm{floor(x)}$) und $\lceil x \rceil$ (für $\mathrm{ceil(x)}$), wobei für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\} \text{ und } \lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$$

gilt, d. h., $\lfloor x \rfloor$ und $[\, x\,]$ sind identisch. Für alle x gilt dann $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$ (daher floor für „Boden“ und ceil für „ceiling“, d. h. „Decke“), wobei Gleichheit genau für $x \in \mathbb{Z}$ gilt, und damit folgt stets $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ und $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ (vgl. Abb. 1).

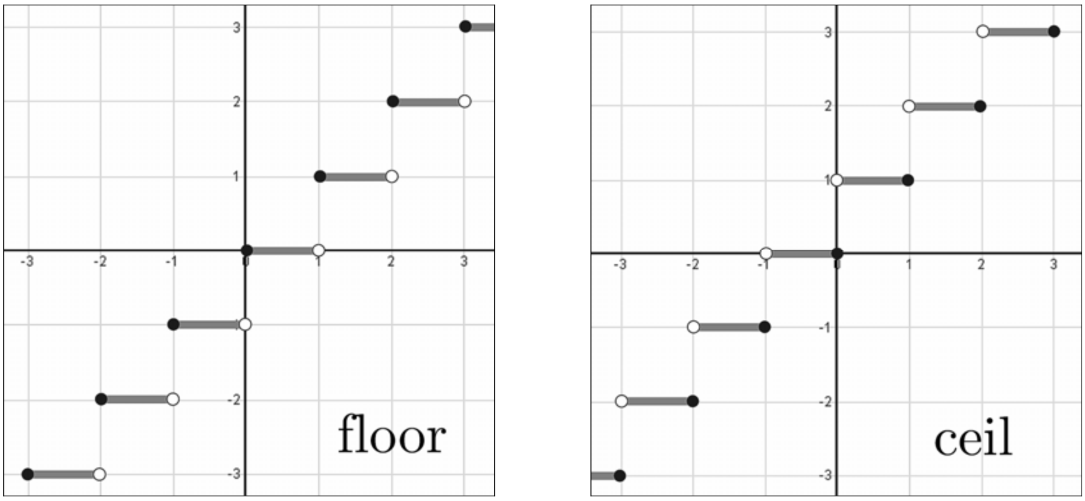

Abb. 1

Aus Abb. 1 ersehen wir unmittelbar, dass der Funktionsplot von ceil aus demjenigen von floor durch Punktspiegelung am Ursprung (bzw. äquivalent durch Spiegelung an der x-Achse *und* an der y-Achse) hervorgeht, und damit erhalten wir ohne Rechnung sofort

$$\mathrm{ceil}(x) = -\,\mathrm{floor}(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Funktionenplotter liefern nun (i. d. R.) nicht solch schöne Darstellungen wie in Abb. 1, aus denen auch hervorgeht, welche Intervallrandpunkte dazu gehören oder nicht – vielmehr bedarf es dazu (erfreulicherweise!) einer Vergegenwärtigung der mathematischen Definition bzw. des mathematischen „Wollens“, und mit Hilfe eines Bildbearbeitungsprogramms kann man dann die so gewonnene Erkenntnis wie in Abb. 1 umsetzen. [5]

Nun gibt es auch die *Rundungsfunktion* round, die nach den üblichen Rundungsregeln als Funktionswert *die dem Argument nächst liegende ganze Zahl* liefert. Wir finden

$$\mathrm{round}(x) = \begin{cases} \mathrm{sign}(x) \cdot (\mathrm{floor}(\mathrm{abs}(x)) & \text{für } \mathrm{abs}(x) - \mathrm{floor}(\mathrm{abs}(x)) < 0{,}5 \\ \mathrm{sign}(x) \cdot (\mathrm{ceil}(\mathrm{abs}(x)) & \text{für } \mathrm{abs}(x) - \mathrm{floor}(\mathrm{abs}(x)) \geq 0{,}5 \end{cases},$$

wobei weitere Standardfunktionen auftauchen: die *Betragsfunktion* und ferner die *Vorzeichenfunktion*, die eine Treppenfunktion im Sinne unserer Definition ist. (Da sich ceil auf floor zurückführen lässt, gilt dies auch für round, was hier aber nicht ausgeführt werden muss.) Abb. 2 zeigt den Funktionsplot, der wiederum mit PARAPLOT 2 erstellt wurde, und zwar über folgenden Funktionsterm (dabei ist int hier identisch mit floor):

```
round(x)=wenn(abs(x)-int(abs(x))<0.5;sign(x)*int(abs(x));sign(x)*ceil(abs(x)))
```

Die Zuordnung der Randpunkte muss man sich wiederum separat überlegen – sie wurden in Abb. 2 nicht eingetragen. Und es ergibt sich schnell, wie die *zweistellige Rundungsfunktion* $(x,n) \mapsto \mathrm{round}(x,n)$ (Rundung auf die n-te Dezimalstelle) mittels Kommaverschiebung dargestellt werden kann:

$$\mathrm{round}(x,n) = \mathrm{round}(x \cdot 10^{-n}) \cdot 10^{n}$$

Damit ist $\mathrm{round}(x) = \mathrm{round}(x,0)$ und beispielsweise $\mathrm{round}(\pi,-3) = \ldots = 3{,}142$.

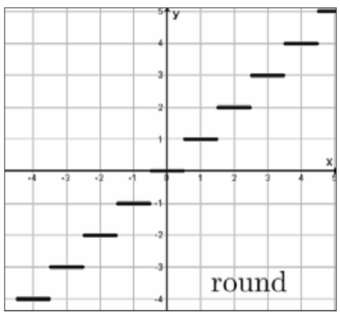

Abb. 2

3 Konstruktion von Treppenfunktionen mit Funktionenplottern

Die bisherigen Beispiele waren nicht wesentlich verschieden. Insbesondere waren die „Treppenintervalle“ gleich lang und zwar alle von der Länge Eins. Ferner waren es Treppen, die ausschließlich aus der *Verkettung* der Identität $x \mapsto x$ mit floor, ceil oder round entstanden waren. Lassen sich diese Parameter bei Funktionenplottern variieren, um eine möglichst große Reichhaltigkeit von Treppenfunktionen generieren zu können?

Abb. 3 zeigt Funktionsplots von $\sin \circ \mathrm{floor} \circ \mathrm{lin}_a$ und von $\mathrm{floor} \circ \sin \circ \mathrm{lin}_a$ (wobei lin_a: $x \mapsto ax$ ist), d. h., es werden die Funktionsterme $\sin(\mathrm{floor}(ax))$ und $\mathrm{floor}(\sin(ax))$ betrachtet, und zwar in diesem Beispiel jeweils für $a = 2$. Dieser Faktor a kann bei PARAPLOT 2 mittels *Schieberegler* variiert werden; er generiert im ersten Fall (links) die konstante „Treppenintervalllänge“ $1/a$ und im zweiten Fall (rechts) π/a. (Rechts in Abb. 3 sehen wir $\mathrm{floor}(\sin(2x)) \neq 1$ ... aber das stimmt doch nicht für alle x, denn es ist z. B. $\mathrm{floor}(\sin(2 \cdot \frac{\pi}{4})) = \mathrm{floor}(1) = 1$ ... doch wo ist der Punkt $(\frac{\pi}{4};1)$ ... ?)

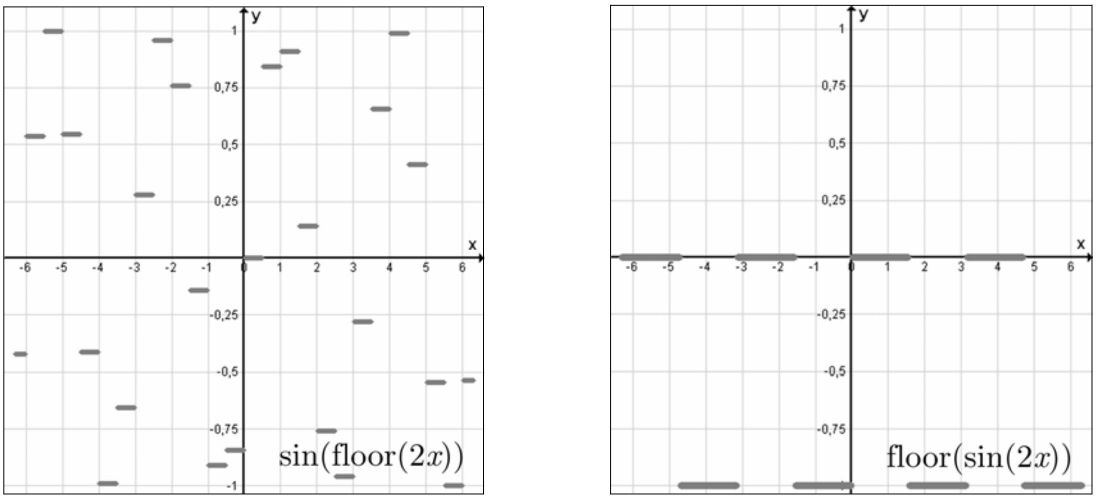

Abb. 3

Abb. 3 führt zur Idee der Konstruktion von Treppenfunktionen aus gegebenen Funktionen f z. B. durch $f \circ \mathrm{floor} \circ \mathrm{lin}_a$ oder $\mathrm{floor} \circ f \circ \mathrm{lin}_a$. Aber welcher dieser beiden Typen ist denn nun interessanter? – Und woran soll sich eine Beantwortung dieser Frage orientieren? Zumindest bei $f = \sin$ wie in diesem Fall erscheint (!) die linke chaotisch, aber reichhaltig, während die rechte langweilig, aber klar strukturiert ist. Rechts liegt eine periodische Funktion vor, links anscheinend nicht. Wirklich? Warum eigentlich nicht? Ist denn diese Darstellung überhaupt richtig? Was geschieht denn, wenn wir $\sin$ durch andere Funktionen ersetzen? – Fragen über Fragen, und aus dem simplen Einsatz eines Funktionenplotters bei mediendidaktischen Zielen erwachsen sowohl mathematische Aktivitäten als auch medienkundliche Fragestellungen ... !

Und dabei haben wir die Struktur der Ganzteilfunktion und ihrer Verwandten nur erst dadurch aufgebrochen, dass wir die Treppenintervalllänge verändert haben, die Sprungstellen aber noch immer äquidistant liegen. Gibt es vielleicht auch eine Möglichkeit zur Konstruktion von Treppenfunktionen mit unterschiedlichen Treppenintervalllängen? Gewiss dann, wenn wir z. B. die Verkettungen $f \circ \mathrm{floor} \circ g$ oder $\mathrm{floor} \circ f \circ g$ mit einer nicht-linearen Funktion g wählen. – So kann g z. B. polynomial definiert oder stückweise linear zusammengesetzt werden, was sich mit Funktionenplottern wie PARAPLOT 2 schön realisieren lässt, wobei wieder die Schieberegler vorteilhaft eingesetzt werden können. – Es ergeben sich weitere Fragen und Möglichkeiten!

4 Abtastungen und Quantisierungen

Der (zunächst) chaotische Eindruck von Abb. 3 (links) schwindet, wenn zusätzlich der Funktionsplot von $\sin(2x)$ angezeigt wird (vgl. Abb. 4): Die Plot-Elemente von $\sin(\text{floor}(2x))$ liegen jeweils direkt rechts am Plot von $\sin(2x)$, und nun haben wir Ordnung im Chaos! Wir sehen hier einem in der Audiotechnik und in der Bildverarbeitung wichtigen Vorgang, nämlich dem der *Abtastung* einer „kontinuierlich en" (oder wie man dort sagt: „analogen") Funktion zwecks *Digitalisierung* über den Prozess der *Diskretisierung*.

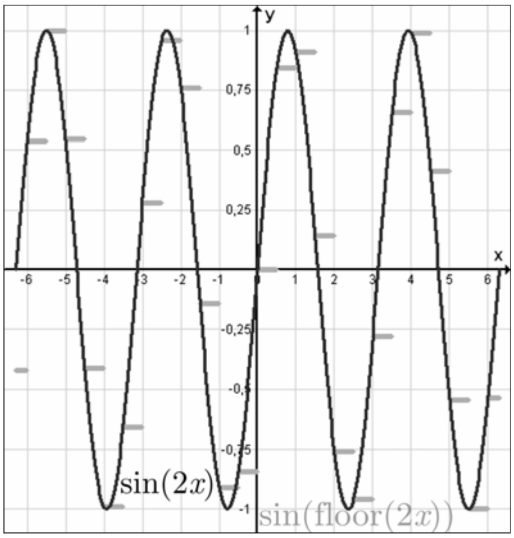

Abb.4

Bezogen auf die Audiotechnik denken wir uns in Abb. 4 nach rechts die Zeit t abgetragen und nach oben den Spannungspegel U, der von einem Mikrophon durch Aufnahme eines „Signals" an einen digitalen Vorverstärker abgegeben wird. Dieses Signal möge ein reiner Sinuston sein. Durch eine mit konstanter Frequenz „getaktete" elektronische Schaltung wird nun zu jeweils zeitlich äquidistanten Zeitpunkten der aktuelle Spannungspegel gemessen und auf einem geeigneten Medium (Tonband, Festplatte) gespeichert. Diese zeitlich äquidistante Pegelmessung heißt „Abtastung" oder *„Sampling"*, der jeweils abgetastete Wert (in Abb. 4 die horizontalen Strecken) heißt *„Sample"* („Probe"), und die für die Abtastung verwendete konstante Frequenz ist die *„Abtastrate"* oder *„Samplingfrequenz"* f_S. Übliche Werte für f_S sind in der Audiotechnik 44,1 kHz, 48 kHz oder 96 kHz. Die Samples werden dann als *Binärwörter* digital gespeichert – bei qualitativ hochwertigen Aufnahmen als 24-Bit-Wörter, sonst auch nur als 16-Bit-Wörter (so auf Audio-CDs). Stellen wir uns vereinfacht nur 8-Bit-Wörter vor, so würden sich genau 2^8 verschiedene Werte speichern lassen. Dieser Vorgang heißt *„Quantisierung"*.

Digitalisierung analoger Daten bedeutet damit eine (zumindest!) *zweifache Diskretisierung*, deren Prinzip in Abb. 5 visualisiert wird (i. d. R. folgen weitere Diskretisierungen!): Zunächst wird wie in Abb. 4 aus einem analogen Eingangssignal durch zeitlich äquidistante Abtastung eine Treppenfunktion erzeugt *(hellgraue Balken)*. In diesem Beispiel wurde das Intervall [0;1] in 10 Abtastintervalle zerlegt, und die Abtastung wurde (exemplarisch!) stets in den Intervallmitten vorgenommen, was wir durch

```
sin(2*pi*fS*(int(10*x)/10+0,05))
```

mit variierbarem f_S beschreiben können.

Die erzeugten Samples stammen in diesem Beispiel aus [-1; 1]. Wegen der Quantisierung kann der (vertikale) Wertebereich aber nur endlich viele Binärwörter enthalten – und zwar wurden in diesem Beispiel auch für die Quantisierung 10 mögliche Intervalle (wie bei der Abtastung) gewählt.

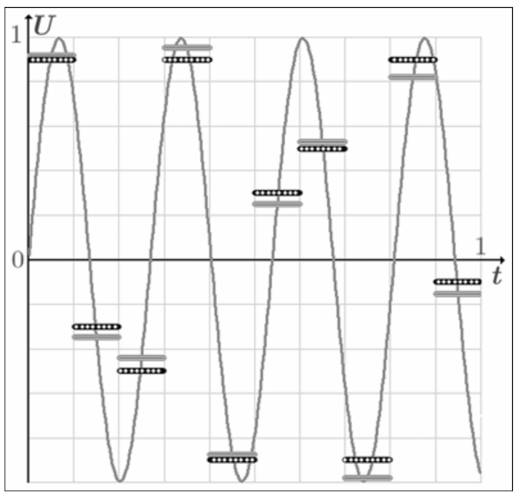

Abb. 5

Doch welche „Quanten“ soll man hieraus für die Samples wählen bzw. festlegen? So hat in Abb. 5 das erste Sample ungefähr den Wert 0,92 und das zweite ungefähr –0,35. Soll man nun mittels floor jeweils den unteren Intervallwert nehmen (also 0,9 bzw. –0,4) oder mittels ceil jeweils den oberen (also 1,0 bzw. –0,3) oder mittels round den ... (?) oder den mittleren oder ... ? Aber was ist eigentlich ein „mittlerer“ Wert? Immerhin ist „Mittelwert“ ein sehr vager Begriff! [6] Nur der Einfachheit halber wurde in Abb. 5 das arithmetische Mittel der Randwerte des betreffenden Intervalls genommen *(schwarze Balken mit weißen Punkten).* – Hier ist nun nicht der Ort zur Diskussion „realer“ Lösungsalgorithmen: Es reicht vielmehr aus, ein Problembewusstsein entstehen zu lassen!

Wir halten fest: *Abtastung und Quantisierung sind zwei Treppenfunktionen* (oder: Diskretisierungen), die gemeinsam die Digitalisierung ausmachen, nämlich:

(1) *Abtastung als primäre Treppenfunktion*: Erzeugung (temporärer!) Primärsamples (wie in Abb. 4);

(2) *Quantisierung als sekundäre, nachgeschaltete Treppenfunktion*: Jedes Primärsample (aus einem halboffenen Intervall) wird in eine endliche Teilmenge dieses Intervalls abgebildet (also „quantisiert“) und dann *nur in dieser reduzierten Form gespeichert.*

Abb. 5 wurde mit Hilfe von PARAPLOT 2 über folgende Funktionsterme erzeugt:

- `f(x) = sin(2*pi*fS*x)` (und zwar für $f_S = 3{,}71$)
- `sample(x) = sin(2*pi*fS*(int(a*x)/a+1/(2*a)))` (und zwar für $a = 10$)
- `quant(x) = sign(sample(x))*(int(abs(sample(x)*5))/5+0,1)`

Die Treppenfunktionen sample und quant werden also durch Verkettung „elementarer“ Treppenfunktionen erzeugt.

Abtastung und Quantisierung spielen nicht nur bei der digitalen Erfassung (und Verarbeitung!) von *Audiodaten* eine wesentliche Rolle, sondern auch bei der von *Graphikdaten*, so z. B. beim *Scannen*: Zeilenweise wird hier das zu erfassende Bild äquidistant abgetastet und dabei in Bildpunkte, die sog. *Pixel*, aufgelöst. Anstelle von „Abtastrate“ oder „Samplingrate“ heißt es hier *„Auflösung“*, kontextabhängig meist in ppi („pixel per inch“) oder dpi („dots per inch“) gemessen. [7] Die Zeit tritt hier nicht als Argumentvariable auf, sondern statt dessen die Ortskoordinaten der Pixel, denn hier liegt eine *zweidimensionale Abtastung* vor, das zu scannende Bild wird also durch diesen Abtastvorgang in Form einer $m \times n$-Matrix strukturiert, deren Elemente (i, j) die Pixel repräsentieren.

Jedem Pixel (i, j) wird nun – abhängig vom jeweiligen *Farbmodell* (RGB, CMYK, YCbCr, …) [8] – durch einen speziellen *Quantisierungsalgorithmus* ein *Farbwert* zugeordnet, wobei dieser Prozess hier nicht allgemein beschrieben werden muss. Das Wesentliche der Auflösung und der Quantisierung bei Graphikdateien können wir aber bereits an einer 8-Bit-Graustufendarstellung erkennen: Jedem Pixel mit den Koordinaten (i, j) wird *quantisierend* einer von 256 möglichen „Helligkeitsstufen“ $0, 1, 2, \dots, 255$ zugeordnet. In Abb. 6 (die auch aus größerem Abstand betrachtet werden sollte!) wird dies exemplarisch am Buchstaben „*f*“ dargestellt: links hochaufgelöst, dann zweimal gefolgt mit einer Auflösung von jeweils 12 × 23 Pixeln (die Pixel sind hier als einfarbig gefärbte Quadrate erkennbar), und zwar sowohl in einer (fehlerhaften!?) *Aliasing-Darstellung* mit nur zwei Quantisierungsstufen 0 und 1 als auch in einer (schöneren?) *Anti-Aliasing-Darstellung* mit 256 Quantisierungsstufen (vgl. Abschnitt 6 [9]).

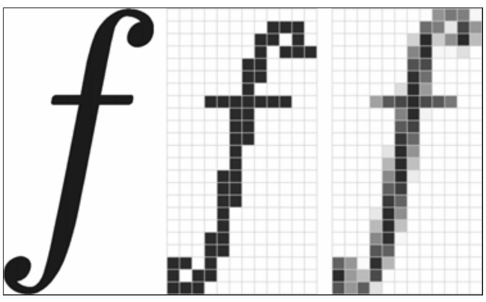

Abb. 6

Aufgrund der diskreten Auflösung und der Quantisierung liegt nun in Abb. 6 sowohl in der Mitte als auch rechts jeweils eine *zweistellige Treppenfunktion* vor – und zwar im Sinne des eingangs zugrunde gelegten Begriffsverständnisses! In Abb. 7 wird dies am Beispiel der Anti-Aliasing-Darstellung aus Abb. 6 rechts demonstriert: das abgetastete und quantisierte f als Säulendiagramm – gewissermaßen „von oben betrachtet“.

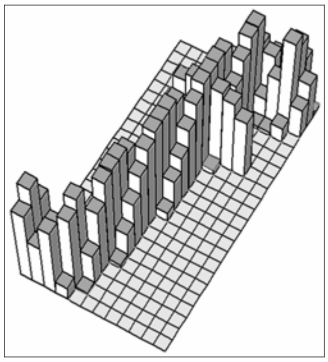

Abb. 7

Bei der Digitalisierung entsteht übrigens ein nicht vermeidbarer Informationsverlust, den man durch eine *höhere Abtastrate* und auch durch eine *feinere Quantisierung* (in der Bildverarbeitung durch größere *Farbtiefe*, z. B. 32 Bit, in der Audiotechnik durch höhere *Auflösung*, z. B. 24 Bit) reduziert. Wie würde sich so etwas wohl auf Abb. 7 auswirken?

5 Neue Medien als (Treppen-)Funktionen

Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist. [10]

Diese zirkulär erscheinende Kennzeichnung ist dennoch treffend, weil der historisch seit fast 4000 Jahren gewachsene Funktionsbegriff derart reichhaltig und vage ist, dass wir die *tatsächlichen Verwendungszusammenhänge* in den Blick nehmen müssen: [11]

- *eindeutige Zuordnung*,
- *Abhängigkeit einer Größe* („abhängige Variable“) *von einer anderen* („unabhängige Variable“), speziell auch zeitabhängige Größen,
- (empirische) *Wertetabelle*,
- *„Kurve“, Graph, Datendiagramm, Funktionsplot,*
- *Formel*.

(Die Bezeichnungen „abhängige“ und „unabhängige“ Variable und „Funktionen mehrerer Veränderlicher“ etc. sollten zwar eigentlich ausgerottet sein, aber sie feiern fröhliche Urständ – und das, obwohl Felix Hausdorffs Definition im Sinne einer *„Funktion als einer rechtseindeutigen Relation“* wohl die einzige formal zufrieden stellende und zugleich auch weit reichende ist!)

Da z. B. ein *Funktionenplotter* aus einem eingegebenen Funktionsterm über die Prozesse „Abtastung“ und „Quantisierung“ eine interne Wertetabelle erstellt und diese auf Bildpunkte (eines Displays oder eines Druckers) abbildet, *ist* er im Sinne funktionalen Denkens *eine materialisierte Funktion*. Beachte: *„Funktionen haben viele Gesichter“* [12]! Zwei weitere Beispiele mögen diese Sichtweise vertiefen:

Eine durch Abtastung und Quantisierung erzeugte digitale Aufnahme wird meist als sog. „Wave-Datei“ im WAV-Format gespeichert. Mit einem der einfachen WAV-Editoren, die i. d. R. zum Betriebssystem heutiger Computer gehören, kann man diese nicht nur abspielen, sondern auch passend zu Abb. 5 visualisieren: Abb. 8 zeigt die Aufnahme eines Monokanals und darunter einen durch horizontale Vergröße-

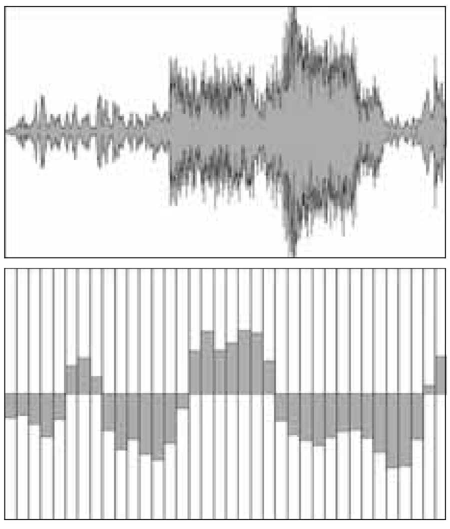

Abb. 8

rung erzeugten Ausschnitt, der die einzelnen quantisierten Samples zeigt und der (wie wir nun wissen) eine Treppenfunktion *ist* (wir brauchen nun nicht mehr nur „darstellt“ zu sagen!). [13] Wir sehen hier wie in Abb. 5 eine sog. „zeitabhängige Funktion“.

Zeitabhängige Funktionen sind in Anwendungssituationen bedeutsam; so ergab eine in den Jahren 1974 bis 1980 durch den Amerikaner Tufte durchgeführte Untersuchung der fünfzehn weltweit bedeutendsten Zeitungen und Nachrichtenmagazine u. a., dass *ca. 75 % der verwendeten Graphiken* zeitachsenorientiert sind! [14] Und auch die Notenschrift muss in diesem Sinn als (zeitabhängige) Funktion begriffen werden! [15]

Besonders interessant sind in diesem Zusammenhang die sog. MIDI-Dateien („Musical Instruments Digital Interface“): Ausgewählten Zeitpunkten eines gegebenen abgeschlossenen Zeitintervalls wird ein *Tupel von Noten* zugeordnet, und zwar *bezüglich Tonhöhe, Tondauer und Instrumentzuordnung*. Damit sind auch MIDI-Dateien (zeitabhängige) Funktionen, und zwar *Treppenfunktionen*. Abb. 9 zeigt die graphische Darstellung des Anfangs einer MIDI-Datei [16] (hier eines Menuetts), und zwar beschränkt auf die Umsetzung durch nur ein Instrument: Die Zeitachse verläuft nach rechts, und nach oben sind Tonhöhe und Dauer des Anschlags (durch die Balkenlänge) eingetragen, so dass die „Treppenstufen“ zwar etwas anders als bisher aussehen, dennoch aber wieder im Sinne unserer Definition „abschnittsweise konstante Bereiche“ sind. Diese Darstellung erinnert übrigens sehr an die sog. *Pianorollen* zur Steuerung der früheren elektrischen Klaviere – und tatsächlich sprechen Musiker heute bei den MIDI-Dateien wieder von „Pianorollen“!

Abb. 9 demonstriert erneut, dass Neue Medien selbst Treppenfunktionen sein können!

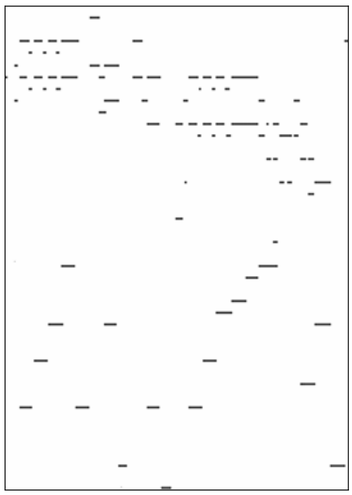

Abb. 9

6 Aliasing

„Aliasing“ (englisch auszusprechen, von lat. *alias*: „sonst“ im Sinne von „anders“) ist eine in technischen Prozessen mögliche *Fehldarstellung von Graphik- oder Audiodaten*, der man beispielsweise bei pixelorientierten Graphikprogrammen durch die Option des „Anti-Aliasing“ zu begegnen versucht (*„mehr Schärfe durch Unschärfe!“*, vgl. Abb. 6).

Und Funktionenplotter können verheerende (systembedingte!) Fehldarstellungen liefern, indem sich z. B. die Funktionsplots von $\sin((a+kf_S)\pi x)$ und $\sin(a\pi x)$ über dem Intervall [0; 2] für alle reellen a, alle $k \in \mathbb{Z}$ und die Samplingfrequenz f_S als identisch erweisen (der sog. „Stroboskopeffekt“). [17] Diese Aussage bezieht sich natürlich nur auf die Abtaststellen (was implizit in „Funktionsplot“ enthalten ist). Der einfache Beweis findet sich in [Hischer 2006]: Ist $f_S = n$, dann sind $x_\nu = \frac{2\nu}{n}$ die Abtaststellen, und es folgt

$$\begin{aligned}\sin((a + kf_S)\pi x_\nu) &= \sin(a\pi x_\nu)\cos(kf_S\pi x_\nu) + \cos(a\pi x_\nu)\sin(kf_S\pi x_\nu)\\ &= \sin(a\pi x_\nu)\underbrace{\cos(2k\nu\pi)}_{1} + \cos(a\pi x_\nu)\underbrace{\sin(2k\nu\pi)}_{0} = \sin(a\pi x_\nu).\end{aligned}$$

Es genügen also elementarmathematische Mittel zur Beschreibung der Abtastung und der Quantisierung bei der Digitalisierung von Graphik- und Audiodaten, um solche mit Treppenfunktionen zusammenhängenden Phänomene zu analysieren und zu verstehen!

7 Schlussbemerkung

Treppenfunktionen lassen sich mit Hilfe Neuer Medien explorativ konstruieren, womit letztere im *mediendidaktischen Sinn* eine methodische Bereicherung für den Unterricht sind. Über Treppenfunktionen kann ferner im *medienkundlichen Sinn* Einsicht in die für die Neuen Medien wichtigen Prozesse der Digitalisierung analoger Daten gewonnen werden. Und da mit Hilfe von Treppenfunktionen z. B. der Stroboskopeffekt erklärbar ist, kann man mit ihnen im *medienerzieherischen Sinn* exemplarisch die Bedeutung Neuer Medien auf die Wahrnehmung der durch sie vermittelten „Wirklichkeit" erörtern.[18]

Literatur

Hischer, Horst [2002]: Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. Mit Beiträgen von Anselm Lambert, Thomas Sandmann und Walther Ch. Zimmerli. Hildesheim: Franzbecker (2. Auflage 2003).

Hischer, Horst [2004]: Mittenbildung als fundamentale Idee. In: *Der Mathematikunterricht* **50**(2004)5, 4–13.

Hischer, Horst [2006]: Abtast-Moiré-Phänomene als Aliasing. Erscheint in: *Der Mathematikunterricht* **52**(2006)2, 13 Seiten.

Miano, John [1999]: Compressed Image File Formats. New York: Addison-Wesley.

Vollrath, Hans-Joachim [1973]: Charakterisierungen der Ganzteilfunktion. In: *Praxis der Mathematik*, **15**(1973), 33–35.

Vollrath, Hans-Joachim [1974]: Treppenfunktionen im Mathematikunterricht. In: *Didaktik der Mathematik,* **2**(1974)1, 52–60.

Vollrath, Hans-Joachim [1989]: Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **10**(1989), 3–37.

Anmerkungen

1 [Vollrath 1974, 53]

2 Lexikon der Mathematik. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2003.

3 Vgl. z. B. [Hischer 2002, 257 ff.].

4 Gauß 1876, vgl. [Vollrath 1973, 33].

5 Hier wird der schöne Funktionenplotter PARAPLOT 2 (Freeware!) von StR Robert Triftshäuser verwendet: http://mathematikunterricht.info/; Nachbearbeitungen mit COREL GRAPHICS SUITE ™.

6 Vgl. [Hischer 2004].

7 ppi und dpi sind – wenn auch häufig synonym gebrauch – *nicht dasselbe*!

8 Mehr hierzu z. B. bei [Miano 1999].

9 Aus [Hischer 2002, 369].

10 [Vollrath 1989, 3]

11 Vgl. hierzu und für das Folgende [Hischer 2002, 319 ff.], ferner den Preprint Nr. 54 vom 24. 02. 2002 unter http://hischer.de/uds/forsch/preprints/hischer/Preprint54.pdf (2,8 MB).

12 So treffend „verdichtet" durch Wilfried Herget, Elvira Malitte und Karin Richter!

13 Mit dem Audioprogramm SAMPLITUDE ™ erzeugt.

14 Vgl. [Hischer 2002, 335].

15 Vgl. [Hischer 2002, 339 f].

16 Mit SAMPLITUDE ™ erzeugt; vgl. auch die Freeware SWIFTLET: http://geocities.com/ap_sugunan/.

17 Dieses Aliasing wird in [Hischer 2002] und in [Hischer 2006] ausführlich untersucht.

18 Ich danke Anselm Lambert für konstruktiv-kritische Rückmeldungen zu dieser Arbeit!