Vorwort zur zweiten Auflage

Die erste Auflage dieses Buches von 2012 hatte eine erfreuliche Aufnahme in der Leserschaft gefunden, sodass der Verlag nun eine neue Auflage plante, verbunden mit dem Vorschlag, Ergebnisse aus meinen aktuellen Studien zum Gleichungsbegriff in diese Neufassung zu integrieren. Damit ergab sich zugleich die Möglichkeit einer grundsätzlichen und ergänzenden Überarbeitung der bisherigen Fassung.

Vorliegendes Buch widmet sich ausgewählten grundlegenden Aspekten der Mathematik mit Blick auf deren Bildungsbedeutsamkeit. Hierzu zählen sowohl grundlegende Begriffe als auch grundlegende Themen und gewiss auch grundlegende Methoden. Wie bereits in der Fassung von 2012 erfolgt im Zusammenhang mit *fundamentalen Ideen* eine Fokussierung auf die mit *Struktur*, *Funktion* und *Zahl* bezeichneten *grundlegenden Begriffe der Mathematik*, nun ergänzt um den Themenkreis *„Gleichungen und Gleichheit“*. Generell wird zwischen dem (abstrakten) *Begriff* und seiner Bezeichnung, nämlich dem *Begriffsnamen*, unterschieden.

Doch „gibt“ es eigentlich derartige mathematische Begriffe, haben sie einen „Seinsstatus“? Und wenn ja, welchen? ULRICH FELGNER schreibt hierzu in der Schlussbetrachtung seiner ‘*Philosophie der Mathematik in der Antike und in der Neuzeit*’ (2020):

> Es zeigte sich insbesondere, daß es ein Reich mathematischer Gegenstände nirgendwo zu geben scheint, weder in der sinnlich wahrnehmbaren Welt, noch in der übersinnlichen Welt. Es kann daher auch nicht sein, daß Mathematische Theorien durch die Objektbereiche, die sie angeblich untersuchen, bestimmt seien. […]
>
> Man redet dennoch in allen mathematischen Disziplinen über mathematische Objekte, so als ob es sie irgendwo oder irgendwie geben würde. Aber bemerkenswert ist doch, daß es dabei auf die Natur (oder die Substanz) der mathematischen Objekte überhaupt nicht ankommt […].

Er merkt an, dass DAVID HILBERT in einem „*Axiomatisches Denken*“ titulierten Vortrag von 1917 eine Mathematische Theorie so gekennzeichnet habe, dass sie „*nichts anderes*“ als ein „*Fachwerk von Begriffen*“ sei, und er ergänzt:

> Es ist beim Aufbau einer mathematischen Theorie also nur zu sagen, daß es die Theorie mit einigen „*Systemen von Dingen*” zu tun hat und daß die Dinge, die in diesen Systemen enthalten sind, „*in gewissen gegenseitigen Beziehungen*” stehen. „*Die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome*” dieser Theorie.

Bei den nachfolgend erörterten *grundlegenden Begriffen der Mathematik* geht es allerdings nicht darum, ob und wie oder wo derartige „Dinge“ existieren, es geht also nicht primär um deren ontologischen Status, sondern es soll lediglich versucht werden, ein mit ihnen zu bildendes *Fachwerk der Begriffe* andeutungsweise erkennbar werden zu lassen.

Dieses Werk wendet sich an alle, die sich für Mathematik im Kontext von Unterricht interessieren, vor allem an diejenigen, die beruflich damit zu tun haben: im Lehramtsstudium, in Studienseminaren, in der Schule, in Lehre und Forschung zur Mathematik und ihrer Didaktik.

Jedoch ist dieses Buch kein Ersatz für übliche Vorlesungen und Bücher zur Mathematik im Rahmen des Lehramtsstudiums, auch ist es keine Sammlung von Vorschlägen zur Gestaltung von Mathematikunterricht. Vielmehr dient es der Reflexion und der Vertiefung der erwähnten grundlegenden Aspekte, wofür in den üblichen mathematischen Fachveranstaltungen wohl die notwendige Muße („scholé“) fehlt. Aber Seminare und neuartige Vorlesungen wären wohl für solche Ziele ein geeigneter Ort – weniger am Anfang des Studiums, aber auch ggf. erst danach.

Die Konzeption dieses Buches basiert auf meiner in langer Lehr- und Unterrichtstätigkeit gewachsenen Auffassung, dass derartige grundlegende Aspekte für ein ertragreiches Unterrichten weder allein aus der Mathematik heraus, noch allein aus einer pädagogischen Perspektive heraus vermittelbar sind, sondern dass beide Seiten unter Berücksichtigung der *historischen Dimension der Entstehung von Mathematik* zusammengehören, was mit zu den *Aufgaben der Didaktik der Mathematik* gehört, deren Ziel in einem Zusammenführen von Mathematik und Pädagogik mit Blick auf den Mathematikunterricht bestehen muss – und zwar unter Berücksichtigung von einschlägigen Sichtweisen der Psychologie, der Soziologie und der Philosophie.

Solche neuartigen Lehrveranstaltungen können sich kaum an einem fachsystematischen Aufbau der Mathematik orientieren, vielmehr sollten sie *kulturhistorische und ontogenetische Aspekte der Entstehung und Entwicklung mathematischer Begriffe* mit im Blick haben: Denn in systematisch aufgebauten Fachvorlesungen sind zwar mathematische Teilgebiete optimiert und elegant darstellbar, aber das dient weniger einem Verständnis der Entstehung von Mathematik in dem o. g. Sinn.

So schreibt HANS FREUDENTHAL in seinem Buch *„Mathematik als pädagogische Aufgabe“*:

> Ein jüngerer Kollege erzählte mir, daß er, sich nach erfolgreichem Mathematik-Studium der Forschungsarbeit zuwendend, lange Zeit meinte, mathematische Arbeiten würden in dem Stile erfunden, in dem man sie zu publizieren pflegt, und daß er – natürlich vergebens – versuchte, in diesem Stile zu forschen. *(1973, S. 59)*

Das macht deutlich, dass im Mathematikstudium (vor allem in Lehramtsstudiengängen – aber warum nicht auch sonst?) neben systematisch aufgebauten, rein mathematischen Lehrveranstaltungen auch reflektierende (und damit didaktische) wie die gerade beschriebenen sinnvoll und wohl auch erforderlich sind. Und so stellt vorliegendes Buch eine „Ernte“ aus meinen Vorlesungen, Seminaren und Facharbeiten dar, die ich seit 1971 – erst an der Technischen Universität Braunschweig und dann an der Universität des Saarlandes – sowohl zur „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus“ als auch zur „Didaktik der Mathematik“ konzipiert und durchgeführt bzw. betreut habe.

Die eingangs mit *Struktur*, *Funktion* und *Zahl* bezeichneten Begriffe stehen in enger Beziehung zueinander und können kaum systematisch aufeinander aufbauend adäquat behandelt werden. Insbesondere weist damit die hier genannte Reihenfolge *keine inhaltliche* und auch *keine systematische Hierarchie* auf. Gleichwohl wird hier der Versuch einer Ordnung gewagt, indem im ersten Kapitel mit „Begriff“ begonnen wird, was aber in allen folgenden Kapiteln in je eigener Weise aufgegriffen wird.

Und so ist das gesamte Buch durch eine streckenweise eher hermeneutische Zugangsweise gekennzeichnet, indem – wie im BRUNERschen Spiralprinzip – Themen erneut aufgegriffen, erweitert und vertieft werden, was bei einer (auch) historisch orientierten Betrachtungsweise geradezu zwangsläufig geschieht. In diesem Sinn werden manche Abschnitte bzw. Kapitel eher in einem „Plauderton" behandelt, andere dagegen in systematischer Orientierung formaler, strenger und vermutlich auch anstrengender, was aber unvermeidlich ist, so insbesondere in den Kapiteln 5, 6 und 8.

Das Anliegen von **Kapitel 1** zeigt sich schon im Titel: *Mathematik kulturhistorisch begreifen*. So sind wir derzeit im Zusammenhang mit der sog. „Modellierung" und mit der „Anwendung der Mathematik" Zeugen einer Ausrichtungstendenz des Mathematikunterrichts, bei der die sog. „Nützlichkeit" der Mathematik als bildungsbedeutsamer Aspekt (über)betont wird, wobei dann weniger zum Tragen kommt, dass zum Menschsein nicht nur das „Nützliche" und damit das „ökonomisch Verwertbare" gehören, sondern dass erst das nicht auf Nutzen und Anwendung Gerichtete den Menschen „ganz Mensch" sein lässt, wie es SCHILLER 1785 formuliert hat:

> … der Mensch spielt nur, wo er in voller Bedeutung des Wortes Mensch ist, und er ist nur da ganz Mensch, wo er spielt. *(Die ästhetische Erziehung des Menschen in einer Reihe von Briefen, 15. Brief.)*

So ist die Mathematik seit ihren Anfängen in vorgeschichtlicher Zeit mit den konträren Ausrichtungen „Anwendung" und „Spiel des Geistes" verbunden, was in Abschnitt 1.1 am Beispiel der Geometrie(n) dargestellt wird und damit verdeutlichen soll, dass Mathematik ebenso wenig einer utilitaristischen Rechtfertigung bedarf wie Kunst, Musik und Dichtung. Damit gehört zum Begreifen von Mathematik auch eine historische Dimension, und das führt in Abschnitt 1.2 zum Konzept der „historischen Verankerung" des Mathematikunterrichts, wie es OTTO TOEPLITZ sinngemäß in einem Vortrag 1927 gefordert hat (vgl. Abschnitt 1.2.2.2):

> Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würden der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen.

Durch diese *historische Verankerung* kann und soll eine *innermathematische Beziehungshaltigkeit* erreicht werden. Hier liegt dann ein enger Zusammenhang mit den *fundamentalen Ideen* vor, die u. a. durch *Historizität* und *Archetypizität* gekennzeichnet sind und die gemäß BRUNER „den Kern aller Naturwissenschaft und Mathematik bilden". Solche Ideen begegnen uns in einer Symbiose aus einer *grundlegenden Handlung* und einem *grundlegendem Begriff*, was zu dem gegenüber der ersten Auflage von 2012 inhaltlich erweiterten Abschnitt 1.3 führt, der sich dem „Begriff" und der „Begriffsbildung" im mathematischen Kontext widmet. Hier wird betont, dass *Begriff*, *Begriffsname* und *Begriffsinhalt* zu unterscheiden sind und dass der Prozess der ontogenetischen Begriffsbildung nur durch indirekte Beobachtung aus dem Wechselspiel im Umgang mit Objekt und Symbol erkennbar wird.

Mit **Kapitel 2** beginnt die Untersuchung inhaltlich grundlegender mathematischer Aspekte: *Strukturen* tragen und beschreiben das Gebäude der Mathematik und damit das „Fachwerk der Begriffe", und strukturelle Aspekte ermöglichen es erst, Teilgebäude der Mathematik zu entwerfen, zu bauen, zu verändern und zu erweitern, sodass Zusammengehörigkeiten zwischen ihnen erkennbar werden oder sogar erst hergestellt werden können.

Das Strukturieren der Mathematik ähnelt daher den Bemühungen sowohl in der Architektur als auch in der Städtebau- und Raumordnung. Dieses *Strukturieren als mathematische Aktivität* setzte in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts ein und kann als *„Wende in der Algebra vom Verfahren zur Struktur“* angesehen werden: Ging es nämlich bis dahin vor allem darum, *Verfahren* zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen zu entwickeln, so etwa bei CARDANO in seiner „Ars Magna“ von 1545, so galt das Interesse nunmehr den *Strukturen*, in denen Gleichungen usw. unter bestimmten Bedingungen lösbar sind.

Drei Ursachen gelten als Auslöser dieser neuen Ausrichtung der Mathematik: in Anknüpfung an das bis dahin übliche Verständnis von „Algebra“ die grundsätzliche Untersuchung der *Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen* n-ten Grades in der Gleichungslehre (ABEL und GALOIS); *Bewegungen und ihre Invarianten in der Geometrie* (KLEIN); *Quadratische Formen* in der Zahlentheorie (LAGRANGE und GAUß). Diese bis dahin zusammenhanglos erscheinenden Bereiche wiesen überraschenderweise Gemeinsamkeiten auf, die mit „Gruppe“ als historisch *erstem Strukturbegriff* abstrahierend erfasst werden konnten (CAYLEY und WEBER).

Zur formalen Beschreibung solcher Strukturen kamen in demselben Jahrhundert als neue Werkzeuge bzw. Sprachen die „Erfindung“ der Mathematischen Logik (BOOLE, FREGE) und der Mengenlehre (CANTOR) hinzu, gepaart mit einer dadurch möglichen zunehmend präziseren Axiomatisierung mathematischer Strukturen (DEDEKIND, PEANO, HILBERT). Andererseits lässt sich *derzeit* in der Mathematik in manchen Bereichen (wenn auch nicht überall) *eine „Wende von den Strukturen zurück zu den Verfahren“* beobachten, die u. a. durch die Verfügbarkeit von Methoden und Werkzeugen der Informatik wie u. a. den CAS (Computeralgebrasystemen) begünstigt wird. Als Beispiel einer mathematischen Struktur wird eine „Mengenalgebra“ vorgestellt. Damit ist das inhaltliche Anliegen dieses Kapitels umrissen, das mit einem kurzen Einblick in die „Fuzzy Logic“ endet.

Ergänzend ist hier anzumerken, dass in diesem Buch *Prinzipien der auf Axiomatisierung beruhenden Strukturierung* nur exemplarisch dargestellt werden – für Zahlen (in Kap. 6, 8) und für Gruppen (in Kap. 5) –, nicht jedoch für weitere Strukturen wie z. B. geometrische oder topologische.

Kapitel 3 widmet sich den *historischen Wurzeln des Zahlbegriffs*, beschränkt auf die vorgeschichtliche Zeit und die Antike. Der Umgang der Ägypter mit Zahlen, insbesondere mit „Stammbrüchen“, wird angedeutet (und auch in Kapitel 7 angesprochen), und der entsprechende Umgang der Babylonier mit „Sexagesimalbrüchen“ wird anhand zweier berühmter Keilschrifttafeln angedeutet. Schwerpunkt dieses Kapitels ist dann das mit „Alles ist Zahl“ beschreibbare Zahlenverständnis der älteren Pythagoreer im Rahmen ihrer Proportionenlehre und der zugehörigen Wechselwegnahme, gefolgt vom Schock der Entdeckung der Inkommensurabilität durch HIPPASOS VON METAPONT (vermutlich am Quadrat oder am Pentagramm?) und der Auflösung dieses Schocks durch die jüngeren Pythagoreer (EUDOXOS) mit seiner genialen Erweiterung des Proportionsbegriffs unter Beibehaltung der Wechselwegnahme, so dass die Pythagoreer von da an aus unserer Sicht über den angeordneten Halbkörper der positiven reellen Zahlen verfügten.

Kapitel 4 zeigt – inhaltlich gegenüber der ersten Auflage erheblich erweitert – die *kulturhistorische Entwicklung des Funktionsbegriffs:* von den Tabellen bei den Babyloniern vor rund 4 000 Jahren über kinematische Kurven bei den Pythagoreern, erste Funktionsgraphen vor rund 1 000 Jahren, der zeitgleich erfundenen neuen Notenschrift durch GUIDO VON AREZZO, graphischen Bewegungsdarstellungen durch NICOLE D'ORESME, in der Folgezeit bei „empirischen Funktionen" (als Tabellen oder „Kurven", z. B. bei HALLEY und LAMBERT) und bei Häufigkeitsverteilungen (z. B. bei HUYGENS und FOURIER). Es folgt der Beginn der expliziten Begriffsentwicklung von „Funktion" durch NEWTON, LEIBNIZ und die Brüder BERNOULLI bis hin zu EULER, gefolgt von der Entwicklung zum modernen Funktionsbegriff durch FOURIER, DIRICHLET und DU BOIS-REYMOND und dann über DEDEKIND, FREGE, PEIRCE, SCHRÖDER, PEANO, RUSSELL, ZERMELO und WHITEHEAD bis hin zur Krönung von „Funktion als Relation" durch HAUSDORFF 1914. Und derzeit begegnen uns Funktionen mit „vielen Gesichtern".

In **Kapitel 5** werden *strukturierende Werkzeuge* vorgestellt und untersucht: Relationen und speziell Funktionen, Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen. Ferner wird erläutert, was unter einem Axiomensystem zu verstehen ist und was hier *Widerspruchsfreiheit*, *Unabhängigkeit* und *Vollständigkeit* bedeuten. Als konkrete mathematische Struktur wird eine BOOLEsche Algebra vorgestellt, und am Beispiel des Gruppenbegriffs werden musterhaft Schwierigkeiten bei der Entwicklung eines widerspruchsfreien und unabhängigen Axiomensystems aufgezeigt.

Kapitel 6 widmet sich in Anlehnung an DEDEKIND und PEANO der Entwicklung eines Axiomensystems für die *natürlichen Zahlen*, was zu einer „Dedekind-Peano-Algebra" genannten Struktur führt. Darauf aufbauend wird die Gültigkeit des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion bewiesen (sic!). Der Rekursionssatz und die sich darauf gründende Möglichkeit zur rekursiven *Definition* der Addition und der Multiplikation werden dargestellt, schließlich auch der Monomorphiesatz: Dieser besagt, dass zwei beliebige Dedekind-Peano-Algebren isomorph sind, was zugleich bedeutet, dass das Axiomensystem für eine Dedekind-Peano-Algebra sogar *vollständig* ist. Zusätzlich wird eine Ordnungsrelation $\leq$ erklärt, die zu $(\mathbb{N},+,\cdot,\leq)$ führt, dem angeordneten Halbring der natürlichen Zahlen. Abschließend werden „endliche Menge" und „unendliche Menge" im Sinne der genialen DEDEKINDschen Idee definiert, und mit Bezug auf Dedekind-Peano-Algebren werden „abzählbar" und „überabzählbar" definiert.

Kapitel 7 beginnt mit der *Entwicklung des Bruchbegriffs,* und zwar im Zusammenhang mit Aspekten der ontogenetischen und der kulturhistorischen Begriffsentwicklung, indem zunächst verdeutlicht wird, dass die Bezeichnung „Bruch" doppeldeutig ist, weil darunter fallweise eine Äquivalenzklasse oder ein Repräsentant dieser Klasse verstanden werden kann – eine Quelle für viele Fehlverständnisse bei „Laien", zu denen auch Schülerinnen und Schüler zählen. Solche Probleme treten bei „Bruchzahl" nicht auf, die aber kein Bruch ist, wohl aber durch unendlich viele Brüche darstellbar ist. Es folgen zwei Abschnitte über *Grundvorstellungen* bei Brüchen und über *Vorstellungen und Darstellungen von Brüchen* und ein ausführlicher Abschnitt über *Bruchrechnung*. Historische und aktuelle Aspekte zu *Bruchentwicklungen* schließen sich an: Stammbruchentwicklungen, Kettenbruchentwicklungen und FAREY-Folgen mit FORD-Kreisen.

In **Kapitel 8** wird zunächst der *konstruktive Aufbau des Zahlensystems* beschrieben, ausgehend von den natürlichen Zahlen über die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen bis hin zu den reellen Zahlen – oftmals durch konkrete ausführliche Durchführung der konstruktiven Schritte, z. T. aber nur durch deren Skizze. Dieser konstruktive Weg wird alternativ kontrastiert mit einer *axiomatischen Kennzeichnung der Menge der reellen Zahlen* und der *Aussonderung der anderen erwähnten Zahlenmengen*, wie es bereits HILBERT vorgeschlagen hatte, und es werden äquivalente Axiomensysteme für den angeordneten Körper der reellen Zahlen vorgestellt. Das Kapitel endet mit Beweisen zur Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit und mit einem kurzen historischen und aktuellen Einblick in die Strukturen der komplexen Zahlen und der Quaternionen.

Kapitel 9 ist neu und widmet sich der Frage, was eine „Gleichung" ist, womit ein weiterer grundlegender Begriff der Mathematik angesprochen wird. Diese Frage scheint müßig zu sein, weil wohl alle, die irgendwie mit Mathematik zu tun haben, mit Gleichungen als einem quasi selbstverständlichen Werkzeug umgehen. Es zeigt sich aber, dass die in der Mathematik verwendete „Gleichheit" – ganz im Gegensatz zum Alltagsverständnis – meist die „Identität" ist, die allerdings mit Mitteln der Mathematischen Logik implizit definierbar ist. Doch andererseits ist die Bezeichnung „Gleichung" im Falle sog. „offener Terme" in den meisten Fällen nicht gerechtfertigt, weil hier i. d. R. gar nichts „gleich" *ist*, sondern zwei Dinge erst (im Sinne von „identisch") *„gleich" werden sollen*. Und schließlich wird auch die Geschichte der Entstehung des Gleichheitszeichens angesprochen.

Da nicht alle in diesem Buch aufgeworfenen Fragen und Probleme beantwortet werden (können), bleibt viel Raum für individuelle, eigenständige oder angeregte Vertiefungen – auch in Studien- und Examensarbeiten unterschiedlichen Umfangs und Schwierigkeitsgrades. Und ganz in diesem Sinn enthält das Buch zahlreiche Aufgaben, dazu in **Kapitel 10** ausführliche Lösungsvorschläge.

Sollte dieses Buch trotz sorgfältiger Durchsicht noch Fehler oder andere Ungenauigkeiten enthalten, so bitte ich um Mitteilung an den Verlag. Das betrifft auch Kommentare und Alternativen zu den Lösungen und ggf. weitere Anmerkungen zu diesem Buch.

Ich danke dem Verlag Springer Nature für die Anregung zur Konzeption einer Neuauflage dieses Buches, insbesondere danke ich hier sowohl Frau Iris Ruhmann als auch Frau Anja Groth für die ganz vorzügliche Betreuung von der Planung an bis hin zur Fertigstellung. Herrn Prof. Dr. Ulrich Felgner, Universität Tübingen, danke ich herzlich für wertvolle Kommentare zur ersten Auflage und vor allem für den reichhaltigen Gedankenaustausch zum Thema „Gleichungen" während der letzten beiden Jahre. Herrn Prof. Dr. Wilfried Herget, Universität Halle-Wittenberg, danke ich für die konstruktive Durchsicht der Texte. Und schließlich und ganz besonders danke ich meiner Frau Ingeborg dafür, dass sie meine konzentrierte Zurückgezogenheit während der Erstellung dieses Buches mitgetragen und ertragen hat. Ihr und meinen beiden Töchtern widme ich dieses Buch.

Horst Hischer, im Oktober 2020