Vorwort

Vorliegendes Buch widmet sich ausgewählten grundlegenden Aspekten der Mathematik mit Blick auf deren Bildungsbedeutsamkeit. Hierzu zählen sowohl grundlegende Begriffe als auch grundlegende Themen und gewiss auch grundlegende Methoden. In diesem Band erfolgt im Zusammenhang mit fundamentalen Ideen eine Beschränkung auf die mit *Struktur*, *Funktion* und *Zahl* bezeichneten *grundlegenden Begriffe der Mathematik*, wobei zwischen dem (abstrakten) „Begriff“ und seiner Bezeichnung, dem Begriffsnamen, unterschieden wird.

Dieses Werk wendet sich an alle, die sich für den Mathematikunterricht interessieren, insbesondere an diejenigen, die beruflich damit zu tun haben: Studentinnen und Studenten, Referendarinnen und Referendare, Lehrerinnen und Lehrer, aber auch Fachleiterinnen und Fachleiter in den Studienseminaren, ferner Hochschullehrerinnen und Hochschullehrer, die in den Lehramtsstudiengängen Mathematik tätig sind. Jedoch ist das Buch kein Ersatz für Vorlesungen bzw. für Bücher zur Mathematik im Rahmen des Lehramtsstudiums, auch ist es keine Sammlung von Vorschlägen zur Gestaltung von Mathematikunterricht. Vielmehr dient es der Reflexion und der Vertiefung solcher erwähnten grundlegenden Aspekte, für die in den normalen mathematischen Fachveranstaltungen des Studiums und in zugehörigen Büchern durchweg kein Platz ist, weil dort dazu wohl meistens die notwendige Muße („schole“) fehlt.

Die Konzeption dieses Buches basiert auf meiner in langer Lehr- und Unterrichtstätigkeit gewachsenen Auffassung, dass derartige grundlegende Aspekte für ein ertragreiches Unterrichten weder allein aus der Mathematik heraus noch allein aus einer pädagogischen Perspektive heraus vermittelbar sind, sondern dass beide Seiten unter Berücksichtigung der historischen Dimension der Entstehung von Mathematik zusammengehören, was mit zu den Aufgaben der Didaktik der Mathematik gehört, deren Ziel in einem Zusammenführen von Mathematik und Pädagogik mit Blick auf den Mathematikunterricht bestehen muss – unter Berücksichtigung von einschlägigen Sichtweisen der Psychologie, der Soziologie und der Philosophie.

Solche Lehrveranstaltungen können sich kaum an einem fachsystematischen Aufbau der Mathematik orientieren, vielmehr müssen sie *kulturhistorische und ontogenetische Aspekte der Entstehung und Entwicklung mathematischer Begriffe* im Blick haben: In systematisch aufgebauten Fachvorlesungen sind zwar mathematische Teilgebiete optimiert und elegant darstellbar, aber das dient weniger einem Verständnis der Entstehung von Mathematik im o. g. Sinn. So schreibt Hans Freudenthal in seinem Buch „Mathematik als pädagogische Aufgabe“:

> Ein jüngerer Kollege erzählte mir, daß er, sich nach erfolgreichem Mathematik-Studium der Forschungsarbeit zuwendend, lange Zeit meinte, mathematische Arbeiten würden in dem Stile erfunden, in dem man sie zu publizieren pflegt, und daß er – natürlich vergebens – versuchte, in diesem Stile zu forschen. *(1973, S. 59)*

Das macht deutlich, dass im Mathematikstudium (vor allem in Lehramtsstudiengängen – aber warum nicht auch sonst?) neben systematisch aufgebauten, rein mathematischen Lehrveranstaltungen auch reflektierende (und damit didaktische) wie die gerade beschriebenen erforderlich sind. Und so stellt vorliegendes Buch eine „Ernte“ aus meinen zahlreichen Vorlesungen und Seminaren dar, die ich seit 1971 – erst an der Technischen Universität Braunschweig und dann an der Universität des Saarlandes – zur „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus“ und zur „Didaktik der Mathematik“ konzipiert und durchgeführt habe.

Die eingangs mit *Struktur*, *Funktion* und *Zahl* bezeichneten Begriffe stehen in enger Beziehung zueinander und können daher kaum aufeinander aufbauend adäquat behandelt werden. Insbesondere stellt die hier genannte Reihenfolge keine begriffliche Hierarchie dar. Gleichwohl wird der Versuch einer Ordnung gewagt, indem im ersten Kapitel mit „Begriff" begonnen wird, was aber in allen folgenden Kapiteln in je eigener Weise „aufgegriffen" wird. Und so ist das gesamte Buch durch eine streckenweise eher hermeneutische Zugangsweise gekennzeichnet, indem – wie im Brunerschen Spiralprinzip – Themen erneut aufgegriffen, erweitert und vertieft werden, was bei einer (auch) historisch orientierten Betrachtungsweise geradezu zwangsläufig geschieht. In diesem Sinn werden manche Abschnitte bzw. Kapitel eher in einem „Plauderton" behandelt, andere dagegen in systematischer Orientierung formaler, strenger und „anstrengender", was aber unvermeidlich ist, so insbesondere in den Kapiteln 5, 6 und 8.

Das Anliegen von **Kapitel 1** zeigt sich schon im Titel: *Mathematik kulturhistorisch begreifen*. So sind wir derzeit im Zusammenhang mit der sog. „Modellierung" und der „Anwendung der Mathematik" Zeugen einer Ausrichtungstendenz des Mathematikunterrichts, bei der die sog. „Nützlichkeit" der Mathematik als bildungsbedeutsamer Aspekt (über)betont wird, wobei dann weniger zum Tragen kommt, dass zum Menschsein nicht nur das „Nützliche" und damit das „ökonomisch Verwertbare" gehören, sondern dass erst das nicht auf Nutzen und Anwendung Gerichtete den Menschen „ganz Mensch" sein lässt, wie es Schiller 1785 formuliert hat:

> … der Mensch spielt nur, wo er in voller Bedeutung des Wortes Mensch ist, und er ist nur da ganz Mensch, wo er spielt. *(Die ästhetische Erziehung des Menschen in einer Reihe von Briefen, 15. Brief.)*

So gehören zur Mathematik seit ihren Anfängen in vorgeschichtlicher Zeit die beiden Aspekte „Mathematik als Anwendung" und „Mathematik als Spiel des Geistes", was in Abschnitt 1.1 am Beispiel der Geometrie(n) dargestellt wird und damit verdeutlichen soll, dass Mathematik ebenso wenig einer utilitaristischen Rechtfertigung bedarf wie Kunst, Musik und Dichtung. Daher gehört zum Begreifen von Mathematik auch eine historische Dimension, und das führt in Abschnitt 1.2 zum Konzept der „historischen Verankerung" des Mathematikunterrichts, wie es 1927 Otto Toeplitz sinngemäß in einem Vortrag gefordert hat (vgl. Abschnitt 1.2.2.2):

> Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würden der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen.

Durch diese *historische Verankerung* kann und soll eine innermathematische Beziehungshaltigkeit erreicht werden. Hier liegt dann ein enger Zusammenhang mit den *fundamentalen Ideen* vor, die u. a. durch Historizität und Archetypizität gekennzeichnet sind und die gemäß Bruner „den Kern aller Naturwissenschaft und Mathematik bilden". Diese Ideen begegnen uns in einer Symbiose aus einer *grundlegenden Handlung* und einem *grundlegendem Begriff*, was zu Abschnitt 1.3 führt, der sich dem „Begriff" und der „Begriffsbildung" im mathematischen Kontext widmet. Hier wird betont, dass Begriff, Begriffsname und Begriffsinhalt zu unterscheiden sind und dass der Prozess der ontogenetischen Begriffsbildung nur durch indirekte Beobachtung aus dem Wechselspiel im Umgang mit Objekt und Symbol erkennbar ist.

Mit **Kapitel 2** beginnt die Untersuchung inhaltlich grundlegender mathematischer Aspekte: *Strukturen* tragen und beschreiben das Gebäude der Mathematik, und strukturelle Aspekte ermöglichen es erst, Teilgebäude der Mathematik zu entwerfen, zu bauen, zu verändern und zu erweitern, so dass Zusammengehörigkeiten zwischen ihnen erkennbar werden oder sogar erst hergestellt werden können. Das Strukturieren der Mathematik ähnelt daher den Bemühungen sowohl in der Architektur als auch in der Städtebau- und Raumordnung. Dieses Strukturieren als mathematische Aktivität ist historisch relativ neu – es basiert auf der „Wende in der Algebra vom Verfahren zur Struktur", die gegen Mitte des 19. Jahrhunderts einsetzte.

Ging es nämlich bis dahin nur darum, *Verfahren* zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen zu entwickeln, so etwa bei Cardano in seiner „Ars Magna" von 1545, so galt das Interesse nunmehr den *Strukturen*, in denen Gleichungen usw. unter bestimmten Bedingungen lösbar sind. Drei Ursachen gelten als Auslöser: die Untersuchung der *Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen n-ten* Grades in der Gleichungslehre, also innerhalb der „bisherigen Algebra" (Abel und Galois); *Bewegungen und ihre Invarianten in der Geometrie* (Klein); *Quadratische Formen* in der Zahlentheorie (Lagrange und Gauß). Diese bis dahin zusammenhanglos erscheinenden Bereiche wiesen überraschenderweise Gemeinsamkeiten auf, die mit „Gruppe" als dem erstem Strukturbegriff abstrahierend erfasst werden konnten (Cayley und Weber). Zur formalen Beschreibung solcher Strukturen kamen in demselben Jahrhundert die „Erfindung" der mathematischen Logik (Boole, Frege) und der Mengenlehre (Cantor) als neue Werkzeuge bzw. Sprachen hinzu, gepaart mit einer dadurch möglichen zunehmend präziseren Axiomatisierung mathematischer Strukturen (Dedekind, Peano, Hilbert). Andererseits lässt sich derzeit in der Mathematik eine „Wende von den Strukturen zurück zu den Verfahren" beobachten, die u. a. durch die Verfügbarkeit von Methoden und Werkzeugen der Informatik wie etwa den CAS (Computeralgebrasystemen) begünstigt wird. – Als Beispiel einer mathematischen Struktur wird eine Mengenalgebra vorgestellt. Damit ist das inhaltliche Anliegen dieses Kapitels umrissen, das mit einem kurzen Einblick in die „Fuzzy Logic" endet.

Ergänzend sei angemerkt, dass in diesem Buch *Prinzipien der auf Axiomatisierung beruhenden Strukturierung* nur exemplarisch dargestellt werden – für Zahlen (in Kap. 6, 8) und Gruppen (in Kap. 5) –, nicht jedoch für weitere Strukturen wie z. B. aus Geometrie oder Topologie.

Kapitel 3 widmet sich den *historischen Wurzeln des Zahlbegriffs*, beschränkt auf die vorgeschichtliche Zeit und die Antike. Der „Umgang" der Ägypter mit Zahlen („Stammbrüche") wird angedeutet (und in Kapitel 7 vertieft), und der entsprechende Umgang der Babylonier („Sexagesimalbrüche") wird anhand zweier berühmter Keilschrifttafeln angedeutet. Schwerpunkt dieses Kapitels ist das mit „Alles ist Zahl" beschreibbare Zahlenverständnis der älteren Pythagoreer im Rahmen ihrer Proportionenlehre und der zugehörigen Wechselwegnahme, gefolgt vom „Schock" der Entdeckung der Inkommensuaribilität (die mutmaßlich am Pentagramm durch Hippasos von Metapont erfolgte) und der Auflösung dieses Schocks durch die jüngeren Pythagoreer (Eudoxos) mit der genialen Erweiterung des Proportionsbegriffs unter Beibehaltung der Wechselwegname, so dass die Pythagoreer von da an aus unserer Sicht über den angeordneten Halbkörper der positiven reellen Zahlen verfügten.

Kapitel 4 zeigt die *kulturhistorische Entwicklung des Funktionsbegriffs:* von Tabellen bei den Babyloniern vor knapp 4 000 Jahren über kinematische Kurven bei den Pythagoreern, ersten Funktionsgraphen vor rund 1 000 Jahren, der etwa zeitgleich erfundenen Notenschrift durch Guido von Arezzo, graphischen Bewegungsdarstellungen durch Nicole d'Oresme, „empirischen Funktionen" in Gestalt von Tabellen oder „Kurven" in den folgenden Jahrhunderten, Eulers Funktionsverständnis bis hin zur ersten abstrakten Definition durch Fourier und Dirichlet und schließlich 1914 zur „Krönung" von „Funktion als Relation" durch Hausdorff – wobei heutzutage eine große Vielfalt dessen vorliegt, was als „Funktion" auffassbar ist.

In **Kapitel 5** werden *strukturierende Werkzeuge* vorgestellt und untersucht: Relationen und speziell Funktionen, Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen. Ferner wird erläutert, was unter einem Axiomensystem zu verstehen ist und was hier Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit bedeuten. Als konkrete mathematische Struktur wird eine Boolesche Algebra vorgestellt, und am Beispiel des Gruppenbegriffs werden musterhaft Schwierigkeiten bei der Entwicklung eines widerspruchsfreien und unabhängigen Axiomensystems aufgezeigt.

Kapitel 6 widmet sich in Anlehnung an Dedekind und Peano der Entwicklung eines widerspruchsfreien und unabhängigen Axiomensystems für die *natürlichen Zahlen*, was zu einer „Dedekind-Peano-Algebra“ genannten Struktur führt. Darauf aufbauend wird die Gültigkeit des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion bewiesen. Der Rekursionssatz und die sich darauf gründende Möglichkeit zur rekursiven Definition der Addition und der Multiplikation werden erörtert, schließlich auch der Monomorphiesatz, der besagt, dass zwei beliebige Dedekind-Peano-Algebren isomorph sind, was zugleich bedeutet, dass das Axiomensystem für eine Dedekind-Peano-Algebra sogar vollständig ist. Zusätzlich wird eine Ordnungsrelation $\leq$ erklärt, die zum angeordneten Halbring $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ führt. Abschließend werden „endliche Menge“ und „unendliche Menge“ im Sinne der genialen Dedekindschen Idee definiert, und mit Bezug auf Dedekind-Peano-Algebren wird „abzählbar“ und „überabzählbar“ definiert.

Kapitel 7 beginnt im Zusammenhang mit Aspekten der ontogenetischen Entwicklung des Bruchbegriffs mit der kulturhistorischen *Entwicklung des Bruchbegriffs*, indem zunächst verdeutlicht wird, dass „Bruch“ doppeldeutig ist, weil darunter je nach Situation eine Äquivalenzklasse oder ein Repräsentant dieser Klasse verstanden werden kann. Mathematiker handhaben das gewiss situativ richtig, hingegen ist dies für „Laien“, zu denen auch Schülerinnen und Schüler zählen, eine Quelle für Fehlverständnisse. Solche Probleme treten bei „Bruchzahl“ nicht auf, die allerdings kein Bruch ist, der wiederum eine Bruchzahl bezeichnet. Es folgen zwei Abschnitte über sog. Grundvorstellungen bei Brüchen und über Vorstellungen und Darstellungen von Brüchen und ein ausführlicher Abschnitt über *Bruchrechnung*, ohne jedoch diese drei Abschnitte mit dem Attribut einer „Didaktik der Bruchrechnung“ schmücken zu wollen. Historische und aktuelle Aspekte zu *Bruchentwicklungen* schließen sich an: Stammbruchentwicklungen, Kettenbruchentwicklungen und Farey-Folgen mit Ford-Kreisen.

In **Kapitel 8** wird zunächst der *konstruktive Aufbau des Zahlensystems* beschrieben, ausgehend von den natürlichen Zahlen über die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen bis hin zu den reellen Zahlen – oftmals durch konkrete Durchführung der konstruktiven Schritte, z. T. aber nur durch deren Skizze. Dieser konstruktive Weg wird mit der Alternative einer *axiomatischen Kennzeichnung der Menge der reellen Zahlen* und der Aussonderung der anderen genannten Zahlenmengen kontrastiert, wie es bereits Hilbert vorgeschlagen hat. Das Kapitel endet mit Beweisen zur Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit und mit einem kurzen historischen und aktuellen Einblick in die Strukturen der komplexen Zahlen und der Quaternionen.

Da nicht alle in diesem Buch aufgeworfenen Fragen und Probleme beantwortet werden (können), bleibt viel Raum für individuelle Vertiefungen – auch in Studien- und Examensarbeiten unterschiedlichen Umfangs und Schwierigkeitsgrades. Ganz in diesem Sinn enthält das Buch viele Aufgaben, dazu Lösungsvorschläge in **Kapitel 9**.

Sollte dieses Buch trotz sorgfältiger Durchsicht noch Druckfehler oder andere Ungenauigkeiten enthalten, so bitte ich um Mitteilung an hischer@math.uni-sb.de. Das betrifft ebenso Kommentare und Alternativen zu den Lösungen, die nebst weiteren Anmerkungen zum Buch unter http://www.math.uni-sb.de/ag-hischer/publikat/buecher/ veröffentlicht werden sollen.

Ich danke Prof. Dr. Ulrich Felgner (Tübingen), Prof. Dr. Wilfried Herget (Halle/Saale), Prof. Dr. Lutz Lucht (Clausthal), Prof. Dr. Hans Schupp (Saarbrücken) und Prof. Dr. Hans-Joachim Vollrath (Würzburg) für ihre Rückmeldungen zu Teilen dieses Buches, das aufgrund einer Anregung von Ulrike Schmickler-Hirzebruch vom Verlag Springer Spektrum, begleitet durch ihre vorzügliche Betreuung, entstanden ist. Vor allem danke ich meiner Frau Ingeborg, der ich dieses Buch widme, für ihre große Geduld bis zu dessen Fertigstellung.

Horst Hischer, im April 2012